ETLA ELINKEINOELÄMÄN TUTKIMUSLAITOS
THE RESEARCH INSTITUTE OF THE FINNISH ECONOMY
Lönnrotinkatu 4 B 00120 Helsinki Finland Tel. 609 900 Telefax 601753

Keskusteluaiheita - Discussion papers

No. 411

Risto Murto

KORKORAKENNEMALLIEN KÄYTTÖ KORKORISKIN ARVIOINNISSA JA HALLINNASSA

This series consists of papers with limited circulation intended to stimulate discussion. The papers must not be referred to or quoted without the authors' permission.

ISSN 0781-6847

28.08.1992

MURTO, Risto, **KORKORAKENNEMALLIEN KÄYTTÖ KORKORISKIN ARVIOINNISSA JA HALLINNASSA.** Helsinki : ETLA, Elinkeinoelämän Tutkimuslaitos, The Research Institute of the Finnish Economy, 1992. 41 s. (Keskusteluaiheita, Discussion Papers, ISSN 0781-6847; no. 411).

TIIVISTELMÄ: Kehittyneillä raha- ja joukkovelkakirjamarkkinoilla on keskeistä pystyä mittaamaan ja hallitsemaan sijoitusten korkoriskiä. Keskeisin korkoriskin mittari on duraatio. Se mittaa korkoinstrumentin hinnan herkkyyttä tuottokäyrän muutoksille. Tässä esityksessä tarkastellaan duraatiomalleja, jotka pohjautuvat jatkuva-aikaisiin korkorakennemalleihin. Verrattuna perinteisiin duraatiomalleihin korkorakennemallit tarjoavat vaihtoehtoisen, teoreettisesti kehittyneemmän tavan mitata korkoriskiä. Työssä näytetään kuinka korkorakennemalleja voi käyttää korkoriskin mittaamiseen ja kuinka näin saadut tulokset voivat erota perinteisen duraatiomallin tuloksista. Lisäksi työssä näytetään muun muassa kuinka näin saadut tulokset voivat erota perinteisen duraatiomallin tuloksista. Lisäksi työssä näytetään muun muassa kuinka korkorakennemallien antamat suojautumissäännöt ovat ehdollisia käytetyille mallin parametrien arvoille.

ASIASANAT: duraatio, immunisaatio, korkorakennemalli, korkoriski

1. JOHDANTO

Kehittyneillä raha- ja joukkovelkakirjamarkkinoilla on keskeistä pystyä mittaamaan ja hallitsemaan sijoituksiin ja lainoihin liittyviä korkoriskejä. Voidaan jopa väittää, että ilman korkoriskin mittaamista ei raha- ja joukkovelkakirjamarkkinoilla voi toimia kilpailukykyisesti. Sekä akateemiset tutkijat että käytännön sijoitustutkijat ovatkin kehittäneet useita malleja korkoriskin hallintaa varten. Useita malleja myös käytetään aktiivisesti rahoitusmarkkinoilla toimivissa instituutioissa.

Keskeisin korkoriskin mittari on duraatio. Se mittaa korkoinstrumentin hinnan herkkyyttä tuottokäyrän muutoksille. Duraatio kertoo kuinka paljon korkoinstrumentin hinta muuttuu suhteellisesti tuottokäyrän muuttuessa. Perinteiset duraatiomallit ovat olleet diskreetin ajan malleja, joiden sisällä on oletus kohtalaisen yksinkertaisesta tuottokäyrän dynamiikasta. Tyypillistä on olettamus, että tuottokäyrä voi muuttua vain siten, että kaikki korot muuttuvat yhtä paljon. Näiden mallien etuna on, että niitä on useimmiten helppo käyttää.

Tässä esityksessä tarkastellaan erityisesti jatkuva-aikaisia korkorakennemalleja ja niiden käyttöä korkoriskin mittaamisessa. Ne tarjoavat vaihtoehtoisen, teoreettisesti kehittyneemmän tavan mitata korkoriskiä kuin perinteiset duraatiomallit.

Korkorakennemallit ovat läheistä sukua optioiden hinnoittelumalleille, joita useat sijoittajat Suomessakin ovat tottuneet jo käyttämään. Korkorakennemallit ovat kuten optiomallitkin hinnoittelumalleja, ts. ne antavat hinnan rahoitus-instrumentille. Tyypillisesti korkorakennemallit antavat hinnan luottoriskittömälle nollakuponkilainalle.

Käytännössä korkorakennemallien lupaavin sovellutuskohde on kuitenkin hinnoittelun sijasta korkoriskin hallinta. Korkorakennemalleja voidaan käyttää korkoriskin mittaamisessa ja

suojautumispäätösten apuvälineenä. Nämä mallit voivat sallia tuottokäyrälle huomattavasti monipuolisemmat liikkeet kuin useimmat perinteiset duraatiomallit. Lisäksi korkorakenne-malleilla voidaan esimerkiksi tarkastella korkojen volatiliteetin vaihteluiden vaikutusta korkoriskin mittareihin.

Esityksen rakenne on seuraava. Luvussa kaksi esitellään eri korkorakennemalleja. Luvussa 3.1 esitellään duraatio ja luvussa 3.2 esitellään esimerkkejä korkoriskin mittaamisesta ja suojautumisesta. Luvussa 3.3 arvioidaan eri duraatiomallien etuja ja rajoitteita. Lopuksi luvussa 4 tehdään lyhyt yhteenveto.

2. ERILAISIA HINNOITTELUMALLEJA

2.1 Velkakirjojen hinnoittelu

Korkorakenne kuvaa velkakirjan koron ja juoksuajan välistä suhdetta. Korkorakennemalleissa johdetaan hinnoitteluyhtälö nollakuponkilainalle, josta vastaavasti voidaan helposti saada tietyn maturiteetin korko.

Tärkein ja perustavin korkosidonnaisten instrumenttien hinnoitteluongelma nollakuponkilainojen hinnoittelu.
Kun nollakuponkilainan hinnoitteluyhtälö on tiedossa, voidaan varsin helposti hinnoitella myös kuponkikorkoiset joukkovelkakirjalainat.[1] Kuponkikorkoiset joukkovelkakirjalainat voidaan aina ajatella nollakuponkilainojen portfolioksi. Korkorakennemallien lähestymistavalla voidaan usein myös johtaa johdannaisinstrumenttien hinnoitteluyhtälöitä. Toisaalta useissa malleissa keskitytään pelkästään johdannaisinstrumenttien hinnoitteluongelmiin.

Tässä luvussa tarkastellaan aluksi eri korkorakennemalleja.

---

[1] Kuponkikorkoisella joukkovelkakirjalla tarkoitamme joukkovelkakirjalainaa, joka tuottaa korkomaksuihin liittyviä kassavirtoja jo ennen juoksuajan loppumista. Nollakuponki-lainalla on vain yksi kassavirta juoksuajan lopussa.

Tarkastelemme kuinka niitä voidaan erotella ja minkälaista empiiristä tukea mallit ovat saaneet tutkimuksissa. Lopuksi keskustelemme lyhyesti myös korkosidonnaisten johdannaisinstrumenttien hinnoittelumalleista.

2.2 Yksi vai kaksi faktoria ?

Tässä luvussa luokittelemme eri korkorakennemalleja kahdella kriteerillä. Ensimmäinen luokitteluperustelu on faktoreiden lukumäärä mallissa. Faktorilla tarkoitetaan korkorakennemallissa stokastista tekijää, josta tuottokäyrä riippuu. Toinen kriteeri on, onko kysymyksessä osittaisen vai yleisen tasapainon malli.

Useimmat jatkuva-aikaiset korkorakennemallit ovat olleet yhden faktorin malleja. Koko korkorakenteen on oletettu riippuvan yhdestä stokastisesta muuttujasta. Miltei aina muuttuja on hetkellinen eli lyhyin mahdollinen korko. Tällaisessä mallissa voimme ratkaista koko tuottokäyrän, kun tiedämme hinnoitteluyhtälön sekä hetkellisen koron ja mallin parametrien arvot. Tällaisia malleja ovat esittäneet esimerkiksi Cox, Intersoll ja Ross (1985), Dothan (1978) ja Vasicek (1977). Nämä eri mallit eroavat mm. sen suhteen millaista stokastista prosessia hetkellisen koron oletetaan noudattavan. Taulukossa 1 on esitetty eräitä mahdollisia prosesseja.

Yhtälöitä voidaan kuvata yleisesti seuraavan kaavan avulla:

$$(1) \qquad dr = (\gamma + \beta r)\, dt + \sigma\, r^{\lambda}\, dW,$$

missä r on hetkellinen korko, dW Wiener-prosessi ja t aika. Termi $(\gamma + \beta r)$ määrittelee hetkellisen koron prosessin deterministisen osan. Wiener-prosessi tuottaa korkokehitykseen stokastiikkaa. σ ja r^{λ} puolestaan määrittelevät koron volatiliteetin.

Taulukko 1. Hetkellisen koron mahdollisia prosesseja

Malli	prosessi
Merton (1973)	$dr = \gamma\, dt + \sigma\, dW$
Vasicek (1977)	$dr = (\gamma + \beta r)\, dt + \sigma\, dW$
CIR (1985) SR	$dr = (\gamma + \beta r)\, dt + \sigma\, r^{1/2}\, dW$
Dothan (1978)	$dr = \sigma\, r\, dW$
GBM[1]	$dr = \beta r\, dt + \sigma\, r\, dW$
Brennan-Schwartz (1980a)	$dr = (\gamma + \beta r)\, dt + \sigma\, r\, dW$
CIR (1980) VR	$dr = \sigma\, r^{3/2}\, dW$

1: GBM = geometrinen Brownin liike. Katso esimerkiksi Black ja Scholes (1973) sekä Marsh ja Rosenfeld (1983).

Tulemme jatkossa tarkastelemaan tarkemmin mm. Vasicekin (1977) korkorakennemallia. Vasicekin mallissa λ on nolla ja termi $(\gamma + \beta r)$ on kirjoitettu seuraavasti: $\alpha(r_0 - r)$. Keskustelemme tällaisen prosessin tulkinnasta myöhemmin yhtälön (3) yhteydessä.

Taulukossa 1 esitetyissä prosesseissa epävarmuus tulee Wiener-prosessista, joka on jatkuva sekä ajassa että tilassa. Eräissä malleissa osa hetkellisen koron prosessiin liittyvästä epävarmuudesta tulee ns. Poisson-prosessista. Tämän prosessin liittäminen yhtälöön (1) mahdollistaa sen, että hetkellinen korko voi muuttua hyppäyksenomaisesti. Esimerkiksi Ahn ja Thompson (1988) sekä Rantala (1988) menettelevät näin. Yksi mahdollinen prosessi on seuraavaa muotoa:

(2) $$dr = (\gamma + \beta r)\, dt + \sigma\, r^{\lambda}\, dW + x\, dZ.$$

Yhtälön (1) ja (2) erona on termi $x\, dZ$, jossa dZ on Poisson prosessi. Poisson-prosessin oletetaan usein olevan riippumaton muista satunnaistekijöistä. Kullekin ajanjaksolle on olemassa

tietty todennäköisyys, että tänä aikana Poisson-prosessi saa nollasta poikkeavan arvon eli että "Poisson-tapahtuma" realisoituu yhden tai useamman kerran. Hetkellisen koron muutoksen suuruus, kun Poisson-prosessin arvo poikkeaa nollasta, on lisäksi satunnaismuuttuja.

Yhden faktorin mallit ovat varsin jäykkiä. Mallien rajoitteena on se, että näissä malleissa eri maturiteetin velkakirjojen tuotot ovat täysin korreloituneita. Tämä johtuu siitä, että mallissa velkakirjan hinta muuttuu vain kuin faktorin arvo muuttuu. Kun mallissa on vain yksi faktori, eri velkakirjojen hinnat muuttuvat yhtäaikaa. Tuottokäyrän muoto voi kuitenkin muuttua. Toinen rajoite on, että yhden faktorin mallien tuottamat tuottokäyrät ovat muodoiltaan varsin rajoittuneita.

Kuviossa 1 on esitetty Vasicekin (1977) korkorakennemallin tuottamia tuottokäyriä. Vasiciekin mallissa faktorina on hetkellinen korko, joka noudattaa seuraavaa prosessia:

$$(3) \qquad dr = \alpha(r_0 - r)dt + \sigma dW.$$

Yhtälön (3) mukaista prosessia kutsutaan Ornstein-Uhlenbeck prosessiksi tai odotusarvoon palautuvaksi prosessiksi (eng. mean reverting process). Kun α on positiivinen, hetkellinen korko pyrkii kohti pitkän aikavälin keskiarvoaan, r_0:aa. α:n suuruus määrittelee kuinka nopeasti hetkellinen korko palautuu kohti pitkän aikavälin keskiarvo. Hetkellisen koron volatiliteetti on vakio ja riippuu termistä σ. Tulemme luvussa 3 tarkastelemaan erityisesti α-parametrin arvon muutosten vaikutusta korkoriskin mittareihin.

Suomalaisilta rahamarkkinoilta on helppo keksiä esimerkki, joka vastaisi tilannetta, jossa α on positiivinen. Valuutta-markkinoiden devalvaatiospekulaatiot noustavat helposti lyhyitä korkoja erittäin korkealle tasolle. Tälläisen korkotason ei kuitenkaan yleensä odoteta säilyvän kuukausia, saati vuosia. Spekulaation mentyä ohi korot laskevat kohti normaalia tasoa.

Vasicekin johtama korkorakenneyhtälö on seuraavaa muotoa:

$$(4) \qquad R(t,\tau) = R(\infty) + (r(t)-R(\infty))\frac{1}{\alpha\tau}(1-e^{-\alpha\tau}) + \frac{\sigma^2}{4\alpha^3\tau}(1-e^{-\alpha\tau})^2,$$

missä $R(t,\tau)$ on hetkellä $t + \tau$ erääntyvän nollakuponkilainan korko hetkellä t, τ on nollakuponkilainan juoksuaika eli maturiteetti. $R(\infty)$ on konsolikorko eli äärettömän pitkäaikaisen juoksuajan omaan velkakirjan korko. Konsolikorko on Vasicekin mallissa seuraava muotoa:

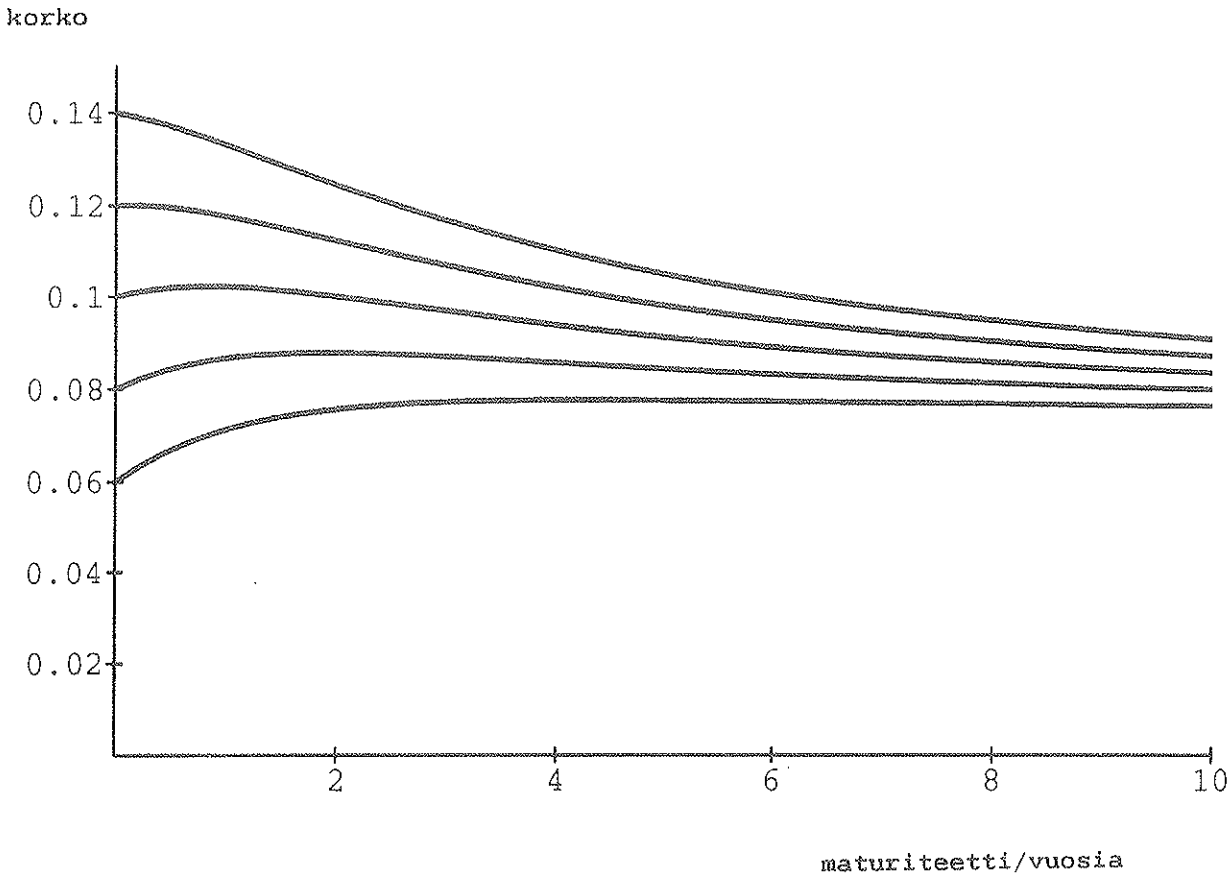
$$(5) \qquad R(\infty) = r_0 + \sigma q/\alpha - \tfrac{1}{2}\,\sigma^2/\alpha^2 = r^* - \tfrac{1}{2}\,\sigma^2/\alpha^2.$$

Konsolikorko on Vasicekin mallissa vakio, koska se ei riipu hetkellisen koron arvosta. Kutsumme r^*:ä, joka on termien r_0 ja $\sigma q/\alpha$ summa, riskillä sopeutetuksi hetkellisen koron keskiarvoksi. q:ta kutsutaan riskin markkinahinnaksi. Voimme hinnoitella nollakuponkilainoja, kun meillä on r^*, α ja σ^2 arvot sekä hetkellisen koron, $r(t)$:n, havainto.

Käytännössä emme pysty havaitsemaan hetkellistä korkoa. Suomessa lyhyin havaittava korko on ns. yli yön korko. Useimmissa suomalaisissa ja ulkomaisissa empiirisissä tutkimuksessa lyhyenä korkona on kuitenkin käytetty yhden tai kolmen kuukauden korkoa.

Kuviossa 1 on käytetty seuraavia parametrien arvoja: $r^* = 0.1236$, $\sigma^2 = 0.0293$ ja $\alpha = 0.5467$. Tuottokäyrät on piirretty neljällä eri hetkellisen koron arvoilla. Ensimmäisessä tapauksessa välitön korko on 0.08, toisessa 0.10, kolmannessa 0.12 ja viimeisessä tapauksessa 0.14. Kaikissa tapauksissa pitkät korot lähestyvät samaa ääriarvoa, kun koron pituus kasvaa, koska konsolikorko ei riipu hetkellisen koron arvosta.

Kuvio 1. Vasicekin (1977) mallin tuottamia tuottokäyriä



Useamman kuin yhden faktorin malleja on esitetty huomattavasti vähemmän kuin yhden faktorin malleja. Tärkein syy on matemaattisten ongelmien kasvaminen siirryttäessä yhden faktorin mallista useamman faktorin malliin. Useamman kuin yhden faktorin mallissa on useimmiten hyvin vaikeaa tai peräti mahdotonta johtaa suljetun muodon korkorakenneyhtälö. Tämä tarkoittaa sitä, että emme voi kirjoittaa suoraan koroille yhtälön (4) kaltaista lausetta.

Kahden faktorin malleja ovat esittäneet mm. Brennan ja Schwartz (1979, 1980b, 1982) sekä Longstaff ja Schwartz (1992). Kolmen tai useamman faktorin teoreettisia malleja ei ole johdettu. Sen sijaan empiirisiä tutkimuksia, joissa on tarkasteltu vähintään kolmea faktoria, on tehty käyttäen hyväksi usean muuttujan CAP-mallia tai APT-mallia.

Brennanin ja Schwartzin mallissa faktoreina ovat hetkellinen korko ja konsolikorko. Longstaff ja Schwartzin mallissa faktoreina ovat hetkellinen korko ja hetkellisen koron muutosten varianssi. Näistä malleista erityisesti jälkimmäinen on mielenkiintoinen, koska Longstaffin ja Schwartzin mallissa on esitetty suljetun muodon ratkaisu eri maturiteetin koroille. Lisäksi Longstaffin ja Schwartzin mallille on esitetty myös empiiristä tukea. Brennan ja Schwartzin mallissa hinnoitteluyhtälölle ei ole suljetun muodon ratkaisua. Emme voi esittää koroille yhtälön (4) mukaista ratkaisua.

Longstaffin ja Schwartzin korkorakenneyhtälö on seuraavaa muotoa:

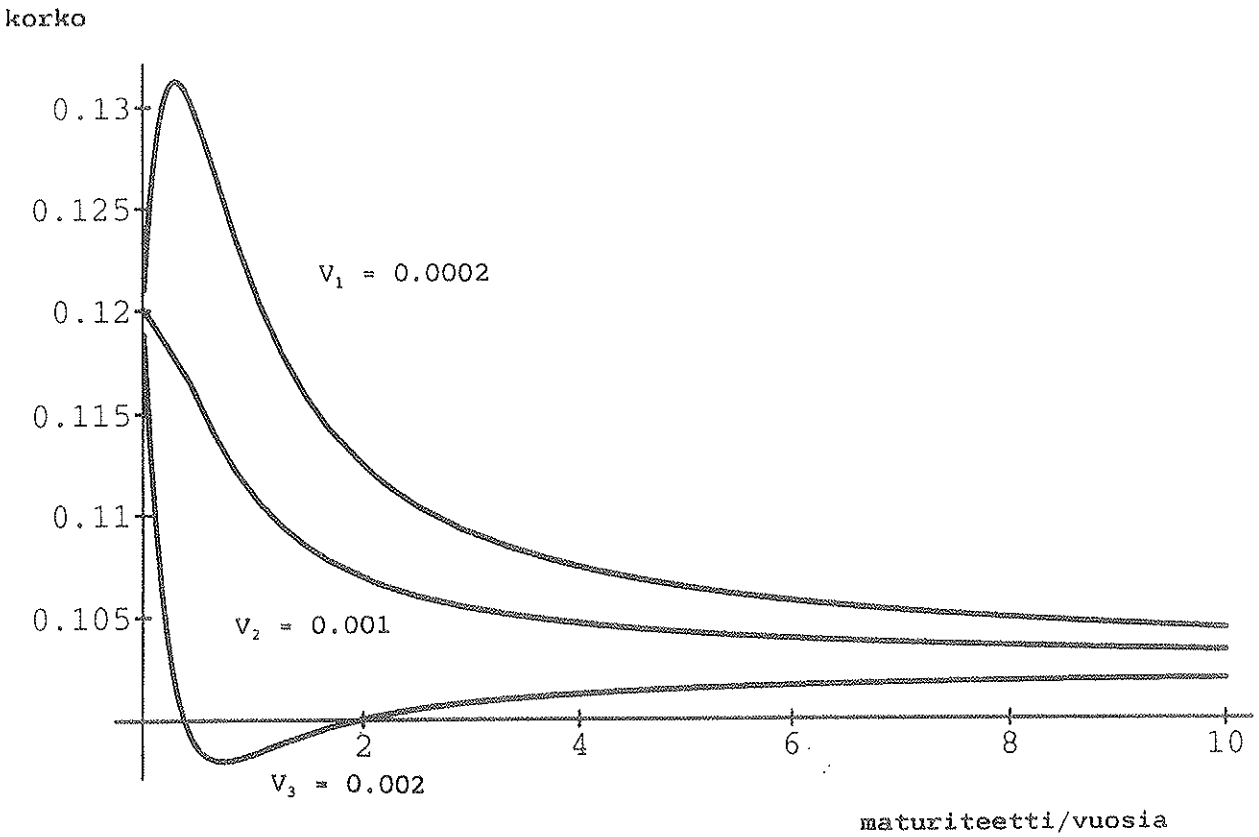
$$(6) \qquad R(t,\tau) = -(\kappa\tau + 2\gamma \ln A(\tau) + 2\eta \ln B(\tau) + C(\tau)r(t) + D(\tau)V(t))/\tau,$$

missä $r(t)$ on hetkellinen korko ja $V(t)$ hetkellisen koron muutosten varianssi. Kertoimet $A(\tau)$, $B(\tau)$, $C(\tau)$ ja $D(\tau)$ on esitetty liitteessä 1. Ne riippuvat hetkellisen koron ja sen volatiliteetin prosesseihin liittyvistä parametreista ja riskiparametreista. Longstaffin ja Schwartzin mallissa tarvitaan kuuden parametrin arvot sekä hetkellisen koron että tämän muutosten volatiliteetin havainnot, jotta nollakuponkilaina voidaan hinnoitella.

Kuviossa 2 on esitetty Longstaffin ja Schwartzin (1992) korkorakennemallin tuottamia korkorakenteita. Kuviossa on käytetty seuraavia parametrien arvoja: $\alpha = 0.0038$, $\beta = 0.0124$, $\delta = 3.3209$, $\nu = 5.4722$, $\gamma = 6.56113$ and $\eta = 41.8827$.

Parametrien ja kertoimien A(τ), B(τ), C(τ) ja D(τ) väliset yhteydet on esitetty liitteessä 1. Hetkellinen korko on kaikissa tapauksissa 0.12. Volatiliteetin arvo vaihtelee ja on joko 0.001, 0.002 tai 0.0002.

Kuvio 2. Longstaff ja Schwartzin (1992) mallin tuottamia tuottokäyriä



2.3 Osittaisen vai yleisen tasapainon malli ?

Toinen tärkeä tekijä, jonka perusteella eri malleja voidaan erottaa toisistaan, on, perustuuko mallin johtaminen osittaisen vai yleisen tasapainon analyysiin. Osittaisen tasapainon mallissa tehdään toisistaan riippumattomat oletukset faktorin stokastisesta prosessista ja ns. riskin markkinahinnasta. Yleisen tasapainon mallissa riskin markkinahinta ja myös faktorin stokastiset prosessit määräytyvät mallin sisällä.

Yleisen tasapainon malleissa mallitetaan yksinkertaisesti talouden rakennetta. Keskeinen esitys on ollut Cox, Ingersoll ja Rossin (jatkossa CIR) (1985) malli. Se oli ensimmäinen talouden mikroperusteisista johdettu korkorakennemalli, joka oli myös testattavissa. Tässä yhteydessä ei ole tarkoitus yrittää esitellä mallin tarkkaa luonnetta. Esimerkiksi Niskanen (1991) tarjoaa tarkan kuvauksen Coxin, Ingersollin ja Rossin korkorakennemallista.

CIR:n malli on yleisen tasapainon malli, jossa mm. mallitetaan sekä sijoittajien hyötyfunktio että talouden teknologia (tuotot). Jotta täsmällinen korkorakenneyhtälö voidaan johtaa, malissa täytyy tehdä hyvinkin täsmällisiä ja rajoittavia oletuksia. Siten mallia ei voida suinkaan pitää yleisenä kuvauksen taloudesta, vaan se on yleisen tasapainon kehikossa johdettu yksi erikoistapaus.

Toinen, vanhempi tapa mallittaa korkorakennetta on osittaisen tasapainon lähestymistapa. Tällöin ei pyritä mallittamaan eksplisiittisesti talouden rakennetta. Esimerkiksi Vasicekin (1977) mallissa ei spesifioida sijoittajien hyötyfunktiota, mutta joudutaan olettamaan riskin markkinahinnalle tietty funktiomuoto. Ei voida sivuuttaa ottamasta kantaa sijoittajien riskikäyttäytymiseen, mutta sen sijaan, että mallinnettaisiin se hyötyfunktiosta lähtien, tehdään suoraan oletus riskin

markkinahinnan funktiomuodosta.[2]

Osittaisen tasapainon lähestymistavan kritiikkinä voidaan esittää, että mikään ei mallissa takaa, että faktorille oletettu prosessi ja oletus sijoittajien riskikäyttäytymisestä ovat konsistentit keskenään. Osittain juuri tämä kritiikki johtikin yleisen tasapainon analyysin soveltamiseen myös korkorakennekirjallisuudessa. Käytännön sovellutusten kannalta ero yhden ja kahden faktorin mallien välillä on kuitenkin useimmiten tärkeämpi kuin ero osittais- ja yleisen tasapainon mallien välillä.

Taulukossa 2 on luokiteltu eri korkorakennemalleja faktoreiden lukumäärän ja tasapainon mukaan.

---

[2] Vasicek (1977) seuraa pitkälti Black ja Scholes (1973) tyyppistä lähestymistapaa. Black-Scholes mallissa hinnoitteluyhtälö on sijoittajien riskipreferensseistä riippumaton, kun oletamme, että option että osakkeen riski on peräisin osakkeen hintaprosessista. Ottamalla vastakkaiset positiot vastaavissa vaateissa, riski voidaan eliminoida. Näin ei voida kuitenkaan menetellä korkorakennemalleissa. Sen sijaan korkosidonnaisten johdannaisinstrumenttien hinnoittelu voidaan edelleen tehdä sijoittajien riskipreferensseistä riippumattomasti.

Taulukko 2. Eri korkorakennemallien luokittelua

	FAKTOREIDEN LUKUMÄÄRÄ	
	YKSI	KAKSI
ARBITRAASI-POHJAISET MALLIT	Dothan (1978) Vasicek (1977) Brennan ja Schwartz (1977) Rantala (1988, 1989)	Brennan ja Schwartz (1979) Richard (1978)
YLEISEN TASAPAINON MALLIT	Cox, Ingersoll ja Ross (1985) Ahn ja Thompson (1988) Longstaff (1989)	Longstaff ja Schwartz (1992)

Mitkä mallit ovat saaneet empiiristä tukea ?

Empiirisiä tutkimuksia korkorakennemalleista ovat tehneet mm. Brennan ja Schwartz (1982), Longstaff (1989), Longstaff ja Schwartz (1992) sekä Suomen aineistolla Rantala (1988, 1989) ja Murto (1992). Useimmat ulkomaiset tutkimukset on tehty Yhdysvaltain aineistolla. Yleinen johtopäätös on ollut, että yhden faktorin mallit eivät riitä selittämään havaittuja korkorakenteita. Yhden faktorin mallit ovat liian jäykkiä, jotta niitä voitaisiin suositella käytännön päätöksenteon apuvälineiksi hinnoiteltaessa nollakuponkilainoja tai joukkovelkakirjoja.

Brennan ja Schwartz (1980b, 1982) , Longstaff ja Schwartz (1992) ja Murto (1992) ovat tutkineet empiirisesti kahden faktorin malleja. Brennan ja Schwartz (1980b, 1982) eivät saaneet tukea mallilleen Kanadan tai Yhdysvaltain aineistolla. Sen sijaan Longstaff ja Schwartz (1992) eivät hylkää nollahypoteesia mallin

oikeasta spesifioinnista Yhdysvaltain korkoaineistolla. Toisin sanoen heidän tulosten mukaan mallia olisi voinut käyttää hinnoittelun tukena estimoiduilla parametreilla.

Murto (1992) on tutkinut Longstaff ja Schwartzin mallia Suomen rahamarkkinoiden korkoaineistolla. Tutkimuksen aineistona olivat Helibor-korkojen viikkohavainnot vuoden 1987 alusta vuoden 1991 kevääseen. Tulosten mukaan Longstaff ja Schwartzin mallin mukainen nollahypoteesi hylättiin Suomen aineistolla. Tämä tarkoittaa sitä, että kahden faktorin malli ei hinnoitellut tarkasti pankkien sijoitustodistuksia. Tulokset olivat tosin myönteisemmät mallille, kun estimoinnit ja testaukset tehtiin osaperiodeilla. Myöskin Vasicekin (1977) yhden faktorin malli hylättiin. Yksi syy tulosten eroavaisuuteen voi olla, että Suomen aineisto koostui pelkistä lyhyistä koroista. Longstaffin ja Schwartzin käyttivät sekä raha- että joukkovelka-kirjamarkkinoiden korkoaineistoa.

3. KORKORISKIN HALLINTA

3.1 Korkoriskin mittaaminen duraatiomallilla

Tässä luvussa esitellään keskeisin korkoriskin mittari duraatio. Luvussa 3.2 tarkastelemme puolestaan kuinka duraatiota voidaan käyttää korkoriskin mittaamiseen ja kuinka voimme rakentaa portfolion, jossa korkoriski on eliminoitu. Tutkimme erityisesti kuinka edellisessä luvussa esiteltyjä hinnoittelumalleja voidaan käyttää näihin tarkoituksiin.

Kuten luvussa 2 tarkastelemme edelleen vaateita, joihin ei liity luottoriskiä. Oletamme myös, että tiedämme korkoinstrumentteihin liittyvät tulevat kassavirrat. Tällöin korkoinstrumenttiin tai korkoinstrumenteista koostuvaan portfolion nimellistuottoon kohdistuu vain korkojen muutoksista johtuva korkoriski.

Keskeinen korkoriskin mittari on duraatio.[3] Se mittaa kuinka paljon vaateen hinta muuttuu tuottokäyrän muuttuessa. Duraatio voidaan määritellään seuraavasti:

$$(7) \qquad D_i(t,\tau,f_i) = - \frac{\partial P(t,\tau,f_i) \; / \; \partial f_i}{P(t,\tau,f_i)}$$

missä $P(t,\tau,f_i)$ on τ-maturiteetin velkakirjan hinta ja f_i on i:s faktori.

Duraatio on velkakirjan hinnan puolijousto allaolevan faktorin suhteen. Duraatio vastaa kysymykseen kuinka paljon velkakirjan hinta muuttuu prosentuaalisesti kun alla olevan faktori muuttuu marginaalisesti. Korkorakennemalleilla voimme laskea tämän puolijouston, kun tiedämme faktorin ja parametrien arvot.

Yhden faktorin tapauksessa tarvittava puolijousto on normaalisti velkakirjan hinnan puolijousto lyhyen koron suhteen. Kahden faktorin mallissa laskemme vastaavasti kaksi puolijoustoa. Longstaffin ja Schwartzin mitta, jossa faktorina olivat lyhyt korko ja tämän koron muutosten varianssi, saamme puolijoustot sekä lyhyen koron että volatiliteetin muutosten suhteen.

Duraation lisäksi on hyvä usein laskea duraation riskimitta, konveksisuus. Konveksisuus lasketaan toisen osittaisderivaatan ja hinnan suhteena:

$$(8) \qquad C_i(t,\tau,f_i) = - \frac{\partial^2 \, P(t,\tau,f_i) \; / \; \partial f_i^{\,2}}{P(t,\tau,f_i)} \; .$$

Konveksisuus mittaa kuinka nopeasti duraatio muuttuu. Jos konveksisuus on pieni, duraatio muuttuu faktorin muuttuessa hitaasti. Jos konveksisuus on suuri, duraatio muuttuu

---

[3] Suomessa duraatiomalleja ovat aikaisemmin käsitelleet muun muassa Aaltonen (1986), Ilmanen (1989) ja Vanhanen (1988). Rogers (1992) tarkastelee pankkien korkoriskin hallintaa ja sivuaa myös perinteisiä duraatiomalleja.

vastaavasti nopeasti.

Duraatio mittaa muutosta faktorin marginaalisten muutosten suhteen. Duraatio kertoo vaateen hinnan suhteellisen muutokset, kun faktori, esimerkiksi hetkellinen korko, muuttuu marginaalisesti. Korot voivat kuitenkin tehdä nopeita, hyppäyksellisiä muutoksia, jolloin duraatio voi muuttua paljonkin. Käytännössä portfoliota sopeutetaan diskreetisti, ei jatkuvasti. Muun muassa näistä syistä johtuen on hyödyllistä tietää, kuinka nopeasti portfolion riskillisyys duraatiolla mitattuna muuttuu faktorin muuttuessa. Jos kahden eri joukkovelkakirjan duraatio on sama, mutta konveksisuus eri, muuttuu näiden joukkovelkakirjojen duraatio eri tavalla faktorin muuttuessa.

Jatkossa erotamme käsitteet duraatio ja duraatiomalli toisistaan. Duraatio on korkoriskin mitta, joka voidaan laskea eri duraatiomallien avulla. Eri korkorakennemallit mahdollistavat duraation laskemisen. Näiden lisäksi on olemassa lukuisa joukko perinteisiä duraatiomalleja, kuten Macaulay-duraatiomalli tai modifioitu duraatiomalli.

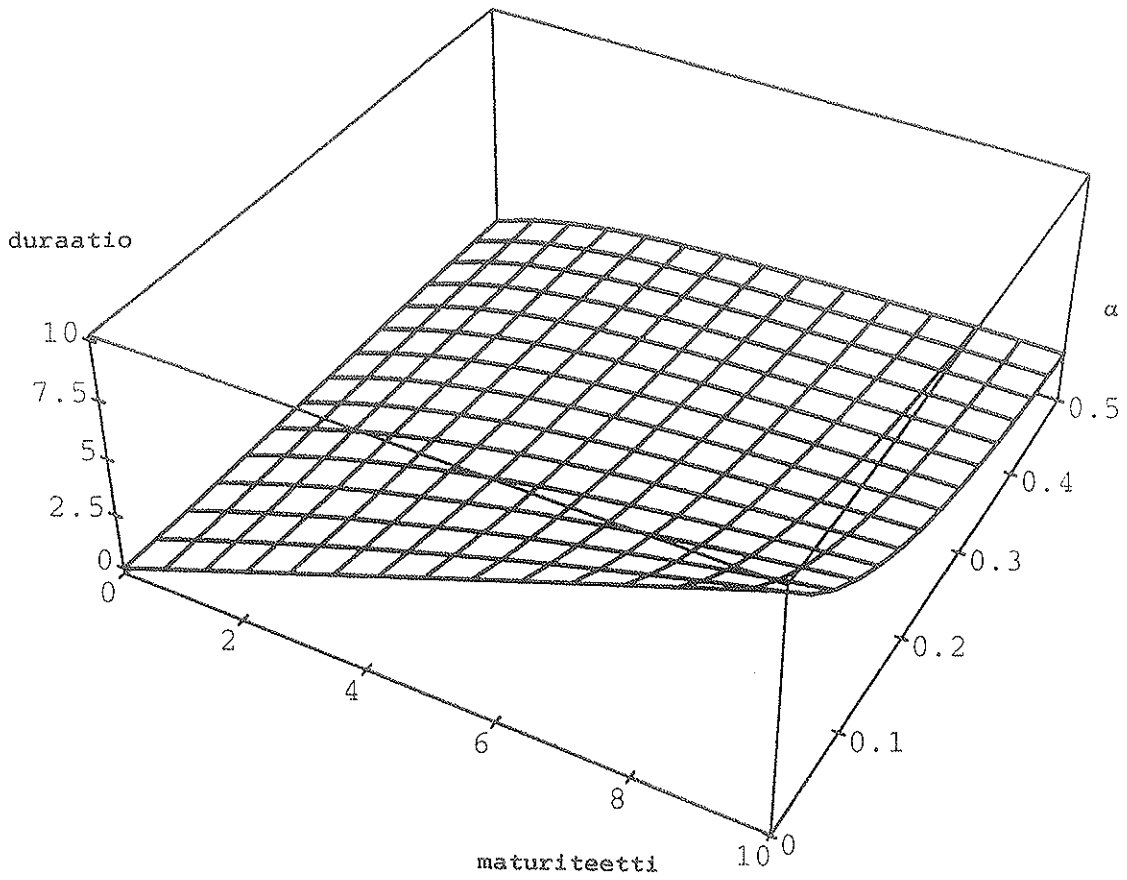
Korkoriskin hallintaa käsittelevässä kirjallisuudessa toinen keskeinen käsite on immunisaatio. Immunisaatiolla tarkoitetaan korkosidonnaisten vaateiden portfolion rakentamista siten, että korkoriski rajoittuu tai eliminoituu kokonaan. Immunisoitu portfolio voidaan rakentaa sopeuttamalla korkoinstrumentteista koostuvaa portfoliota siten, että sekä taseen saatava- että velkapuolen markkina-arvot ja duraatiot ovat samat. Tällaisen portfolion korkoriski on eliminoitu.

Vasicekin (1977) mallin antama duraatio on esitetty kuviossa 3. Korkorakennemallien antama duraatio riippuu olennaisesti mallissa käytetyistä parametrien arvoista. Kuviossa 3 duraatio on esitetty nollakuponkilainan maturiteetin ja α:n funktiona. Muut käytetyt parametrien arvot ovat seuraavat: $r^* = 0.1236$, $\sigma^2 = 0.0293$ ja $\alpha = 0.5467$. Hetkellinen korko on 12 %.

Kuviosta nähdään, että kun α:n arvo on tarvittavan suuri, duraatio ei kasva käytännössä juuri lainkaan maturiteetin kasvaessa. Korkoriski duraatiolla mitattuna ei kasva. Toisaalta, kun α:n arvo lähestyy nollaa eli lyhyen koron prosessi lähestyy satunnaiskulkua, duraatio kasvaa nopeasti maturiteetin kasvaessa. Kun hetkellinen korko on satunnaiskulkua, paras ennuste tulevasta korosta on nykyinen korko ja jokainen koron muutos tulkitaan pysyväksi. Tällöin juoksuajaltaan pitkätkin nollakuponkilainat reagoivat voimakkaasti hetkellisen koron muutoksiin. Toisaalta kun α on positiivinen ja poikkeaa selvästi nollasta, hetkellisen koron odotetaan palautuvan kohti keskiarvoaan eivätkä pitkät korot ole herkkiä hetkellisen koron muutoksille.

Kun α lähestyy nollaa, Vasicekin mallin duraatio lähestyy Macaulay-duraatiota. Macaulay-duraatiomallin mukaan nollakuponkilainan duraatio vastaa nollakuponkilainan juoksuaikaa. Tämä johtuu siitä, että Macaulay-duraatiomallissa oletetaan, että tuottokäyrä tekee vain paralellejä muutoksia ts. kaikki korot muuttuvat yhtä paljon.

Kuvio 3. Duraation riippuvuus alfan arvosta ja nollakuponkilainan juoksuajasta.



3.2. Suojautuminen korkoriskeiltä korkorakennemallien avulla

Yleensä duraatioon liittyvässä kirjallisuudessa, jossa käsitellään korkoriskin mittaamista ja hallintaa, ei oteta kantaa mikä on optimaalinen korkoriskin taso. Näin menetellään myös tässä luvussa. Tulevissa esimerkeissä emme ota kantaa kuinka suurelle korkoriskille sijoittajan kannattaa olla alttiina. Pyrimme näyttämään miten korkoriskiä voidaan mitata ja kuinka se voidaan eliminoida, jos niin halutaan.

Esimerkki 1. Tässä esimerkissä tarkastelemme duraation laskemista kuponkikorkoisille joukkovelkakirjoille.

Joukkovelkakirjalaina, joka tuottaa kassavirran jo ennen

juoksuajan loppua, voidaan tulkita nollakuponkilainoista koostuvaksi portfolioksi. Kutakin kassavirtaa vastaa tietty nollakuponkilaina. Jvk:n duraatio voidaan laskea nollakuponkilainojen duraatioiden painotettuna keskiarvona. Käytämme seuraavaa kaavaa:

$$(9) \qquad D = \sum_{\tau=1}^{K} \frac{P_\tau F_\tau}{P} D_\tau,$$

missä D_τ τ-maturiteetin nollakuponkilainan duraatio, F_τ on hetkellä $t_0 + \tau$ tulevan kassavirran nimellisarvo ja P_τ on vastaavalla hetkellä erääntyvän yhden yksikön nollakuponkilainan hinta. P on joukkovelkakirjan hinta.

Joukkovelkakirjan duraatio määräytyy kahdesta osasta: kassavirtojen painorakenteesta ja nollakuponkilainojen duraatiosta. Painorakenne riippuu ensinnäkin joukkovelkakirjan kassavirrasta eli lyhennysten ja korkomaksujen ajoittumisesta ja suuruudesta sekä toiseksi siitä korosta, jolla nämä kassavirrat diskontataan. Nollakuponkilainan duraatio riippuu puolestaan käytettävästä duraatiomallista. Esimerkiksi usein käytetyn Macaulay-duraatiomallin mukaan nollakuponkilainan duraatio vastaa nollakuponkilainan juoksuaikaa. Tällöin esimerkiksi viiden vuoden päästä erääntyvän ja vuosittaisen kassavirran tuottavan joukkovelkakirjan duraatio tulee olemaan:

$$(10) \qquad D_{mac} = w_1\, 1 + w_2\, 2 + w_3\, 3 + w_4\, 4 + w_5\, 5,$$

missä w_i, $i = 1,..,5$, on i:nen vuoden kassavirran paino.

Seuraavissa taulukoissa käymme läpi eri komponenttien vaikutusta joukkovelkakirjan duraatioon.

Taulukossa 3 on laskettu 5-vuoden joukkovelkakirjan duraatio perinteisellä duraatiokaavalla sekä Vasicekin mallilla. Tuottokäyrä vastaa kuviossa 1 esitettyä tapausta, jossa hetkellinen korko on 0.12. Tuottokäyrän avulla saamme nollakuponkilainojen sekä joukkovelkakirjan hinnat.

Taulukko 3. **Kymmenen vuoden joukkovelkakirjan duraatio laskettu Macaulay-duraatiomallilla ja Vasicekin (1977) mallilla.** Joukkovelkakirjan kuponkikorko on 10 % ja se on kertalyhenteinen. Velkakirjan nimellispääoma 10 miljoonaa markkaa. Vasicekin mallissa käytetyt parametrien arvot ovat seuraavat: $r^* = 0.1236$, $\sigma^2 = 0.0293$ and $\alpha = 0.5467$. Hetkellinen korko on 0.10.

t	kassavirta milj. mk	Macaulay-duraatio	Vasicek duraatio	$P_\tau F_\tau / P$
1	1	1	0.7703	0.0847
2	1	2	1.2163	0.0768
3	1	3	1.4744	0.0702
4	1	4	1.6238	0.0645
5	1	5	1.7103	0.0595
6	1	6	1.7603	0.0550
7	1	7	1.7893	0.0510
8	1	8	1.8061	0.0472
9	1	9	1.8158	0.0438
10	11	10	1.8214	0.4472

JVK:n duraatiot:	Nollakuponkilainan maturiteetti, jolla vastaava duraatio
Macaulay-duraatio: $\sum P_\tau F_\tau / P \; D_\tau = 6.94$	6.94 vuotta
Vasicekin korkorakennemalli: $\sum P_\tau F_\tau / P \; D_\tau = 1.64$	4.15 vuotta

Taulukko 4. **Kymmenen vuoden joukkovelkakirjan duraatio laskettu Macaulay-duraatiomallilla ja Vasicekin (1977) mallilla.** Joukkovelkakirjan kuponkikorko on 15 % ja se on kertalyhenteinen. Velkakirjan nimellispääoma on 10 miljoonaa markkaa. Vasicekin mallissa käytetyt parametrien arvot ovat seuraavat: $r^* = 0.1236$, $\sigma^2 = 0.0293$ and $\alpha = 0.5467$. Hetkellinen korko on 0.10.

t	kassavirta milj. mk	Macaulay-duraatio	Vasicek duraatio	$P_\tau F_\tau / P$
1	1.5	1	0.7703	0.0980
2	1.5	2	1.2163	0.0889
3	1.5	3	1.4744	0.0812
4	1.5	4	1.6238	0.0746
5	1.5	5	1.7103	0.0689
6	1.5	6	1.7603	0.0637
7	1.5	7	1.7893	0.0590
8	1.5	8	1.8061	0.0547
9	1.5	9	1.8158	0.0507
10	11.5	10	1.8214	0.3651

JVK:n duraatiot:	Nollakuponkilainan maturiteetti, jolla vastaava duraatio
Macaulay-duraatio: $\sum P_\tau F_\tau/P\ D_\tau = 6.46$	6.46 vuotta
Vasicekin korkorakennemalli: $\sum P_\tau F_\tau/P\ D_\tau = 1.61$	3.9 vuotta

Taulukko 5. **Kymmenen vuoden joukkovelkakirjan duraatio laskettu Macaulay-duraatiomallilla ja Vasicekin (1977) mallilla.** Joukkovelkakirjan kuponkikorko on 10 % ja se on tasalyhenteinen. Velkakirjan nimellispääoma on 10 miljoonaa markkaa. Vasicekin mallissa käytetyt parametrien arvot ovat seuraavat: $r^* = 0.1236$, $\sigma^2 = 0.0293$ and $\alpha = 0.5467$. Hetkellinen korko on 0.10.

t vuosia	kassavirta milj. mk	Macaulay-duraatio	Vasicek duraatio	$P_t F_t /P$
1	2	1	0.7703	0.1428
2	2	2	1.2163	0.1295
3	2	3	1.4744	0.1183
4	2	4	1.6238	0.1087
5	2	5	1.7103	0.1003
6	2	6	1.7603	0.0927
7	2	7	1.7893	0.0859
8	2	8	1.8061	0.0800
9	2	9	1.8158	0.0738
10	2	10	1.8214	0.0685

JVK:n duraatiot:	Nollakuponkilainan maturiteetti, jolla vastaava duraatio
Macaulay-duraatio: $\sum P_t F_t/P D_t = 4.84$	4.84 vuotta
Vasicekin korkorakennemalli: $\sum P_t F_t/P D_t = 1.51$	3.2 vuotta

Macaulay-duraatiomitalla jvk:n duraatioksi tulee 6.94, kun se Vasicekin mallilla on 1.64. Ero on huomattava. Ero tulee Vasicekin mallissa käytetyistä parametreista. Vasicekin mallissa käytetyt parametrit implikoivat, että hetkellisellä prosessilla on selvä taipumus palata kohti historiallista keskiarvoaan.

Taulukoissa 4 ja 5 on laskettu esimerkit joukkovelkakirjoilla, joissa joko lyhennykset tai kuponkikorko eroavat yllä esitetystä esimerkistä. Taulukossa 4 jvk:n kuponkikorko on 15 %. Tämä muuttaa painoja, koska suhteellisesti enemmän kassavirtaa tulee jo ennen juoksuajan päättymistä. Tämän johdosta joukkovelkakirjan riskillisyys mitattuna duraatiolla pienenee. Macaulay-duraatio on 6.46 ja Vasicekin mallin duraatio 1.61.

Taulukon 5 joukkovelkakirjassa kuponkikorko on 10 % kuten taulukossa 3, mutta lainaa lyhennetään tasalyhennyksin joka vuosi. Kassavirrat ja painot muuttuvat olennaisesti. Macaulay-duraatio on tässä tapauksessa vain 4.84. Vasicekin mallin duraatio on 1.51. Perinteinen duraatio muuttuu siten huomattavasti enemmän kuin korkorakennemallin antama duraatio. Vasicekin mallissa esimerkiksi 5- ja 10-vuoden nolla-kuponkilainan duraatiot eivät eroa kovinkaan paljon toisistaan, joten tällöin ei suurta merkitystä miten kassavirrat jakautuvat näiden maturiteettien välillä. Sen sijaan Macaulay- duraatiossa 5- ja 10-vuoden nollakuponkilainojen duraatiot eroavat suuresti. Tällöin 10-vuoden painojen pienentäminen ja muiden maturiteettien painojen suurentaminen vaikuttaa myös selvästi joukkovelkakirjan duraatioon.

Taulukoissa 3-5 on myös esitetty niiden nollakuponkilainojen maturiteetit, joiden duraatio vastaavat joukkovelkakirjojen duraatiota. Macaulay-duraation tapauksessa nollakuponkilainan maturiteetti saadaan suoraan jvk:n duraatiosta.

Esimerkki 2. Seuraavaksi tarkastelemme yksinkertaista esimerkkiä miten yhden faktorin mallia voidaan käyttää korkoriskin hallinnassa. Tutkimme kuinka voimme replikoida tietyn

joukkovelkakirjan. Yhden faktorin mallina käytämme Vasicekin (1977) mallia.

Esimerkkimme voi kuvata tilannetta, jossa olemme hankkineet velkaa laskemalle liikkeelle joukkovelkakirjalainan. Kutsumme tätä joukkovelkakirjaa jatkossa suojattavaksi tai replikoitavaksi joukkovelkakirjaksi. Nyt haluamme sijoittaa varojamme joukkovelkakirjoihin siten, että poistamme liikkeelle laskemastamme joukkovelkakirjasta aiheutuvan korkoriskin. Yksinkertaisin tapa olisi tietysti ostaa joukkovelkakirja, jolla on täysin sama kassavirta. Esimerkissä haluamme kuitenkin näyttää kuinka voimme replikoida suojattavan joukkovelkakirjan ja sijoitamme varamme kahteen joukkovelkakirjaan, joiden kassavirrat poikkeavat replikoitavasta joukkovelkakirjasta.

Esimerkin voisi myös helposti rakentaa vastaamaan toiseen kysymykseen: Millä yhdellä joukkovelkakirjalla voimme suojata kahdesta eri joukkovelkakirjasta koostuvan jvk-portfolion ?

Esimerkkimme immunisoidut portfoliot on esitetty taulukossa 6. Tarkastelemme koko ajan nollakuponkilainoja. Ensimmäisessä tapauksessa haluamme replikoida 7-vuoden joukkovelkakirjan 5- ja 10-vuoden joukkovelkakirjoilla. Kutsumme 5- ja 10-vuoden joukkovelkakirjoja suojaaviksi tai replikoiviksi joukkovelkakirjoiksi.

Asetamme kaksi rajoitetta. Ensinnäkin vaadimme, että portfoliossamme suojattavan jvk:n ja suojaavien joukkovelkakirjojen markkina-arvot ovat yhtäsuuret. Tämän rajoitteen ollessa voimassa emme ole nettomääräisesti sijoittaneet tai lainanneet varoja. Ensimmäinen rajoite on siten:

$$(11) \qquad N^1 P(\tau_1) + N^2 P(\tau_2) = N^3 P(\tau_3):$$

missä N^i on vaateen i nimellisarvo.

Toinen rajoite on, että faktoriherkkyys mitattuna ensimmäisellä

osittaisderivaatalla on sama portfolion kummallakin puolella. Tarkastelemme tapausta, jossa faktorina on hetkellinen korko.

(12) $$N^1 P_r(\tau_1) + N^2 P_r(\tau_2) = N^3 P_r(\tau_3)$$

Toinen rajoite voidaan kirjoittaa myös duraatioiden avulla, jolloin voisimme ratkaista portfoliopainot. Olemme kuitenkin sieventäneet rajoitetta, koska voimme tässä ja tulevissa esimerkeissä aina laskea ensimmäiset osittaisderivaatat faktoreiden suhteen. Tällöin voimme kirjoittaa rajoitteen osittaisderivaattojen avulla ja ratkaista joukkovelkakirjojen nimellisarvot. Rajoite kannattaa kirjoittaa duraatioiden avulla silloin, kun esimerkiksi halutaan käyttää Macaulay-duraatiomallia diskreetin ajan muodossa (katso liite 2).

Käytämme Vasicekin mallissa Suomen rahamarkkinoilta estimoituja parametrien arvoja. Nämä arvot ovat seuraavat: $r^* = 0.1236$, $\sigma^2 = 0.0293$ ja $\alpha = 0.5467$.

Taulukon 6 ensimmäisen rivin mukaan annetuilla parametrien arvoilla suojaamme 100 yksikön nimellisarvoisen 7-vuoden nollakuponkilainavelan ostamalla nimellisarvoltaan 24.74 yksikön 5-vuoden lainan ja 89.16 yksikön 10-vuoden lainan. Oletamme jatkossa, että yksikkö on miljoonaa markkaa. Täten suojaisimme 7-vuoden velan, jonka nimellisarvo on 100 miljoonaa markkaa, ostamalla 5- ja 10-vuoden lainat, joiden nimellisarvot ovat 24.74 ja 89.16 miljoonaa markkaa.

Taulukon 6 toinen rivi antaa vastaavat sijoitukset, kun käytämme Macaulay-duraatiomallia. Nyt sijoitukset jakautuvat huomattavasti tasaisemmin. Ostaisimme nimellisarvoltaan melkein saman arvoiset 5- ja 10-vuoden nollakuponkilainat.

Taulukon 6 toisessa tapauksessa keskitymme juoksuajaltaan lyhyisiin velkoihin ja sijoituksiin. Nyt liikkeelle laskemamme nollakuponkilainan eli velkamme juoksuaika on vain yhden vuoden ja pyrimme replikoimaan sen puolen ja kahden vuoden nollakuponkilainoilla.

Viimeisessä tapauksessa muutamme tilannetta siten, että pyrimme kahdella juoksuajaltaan lyhyellä nollakuponkilainalla replikoimaan juoksuajaltaan pidemmän nollakuponkilainan. Tämä johtaa siihen, että jotta voimme replikoida kahden vuoden nollakuponkilainan puolen ja yhden vuoden lainoilla, sijoitamme vuoden arvopaperiin ja lainaamme varoja puolen vuoden nollakuponkilainalla.

Taulukon 6 esimerkit osoittivat, että suojautumissäännöt voivat Vasicekin mallia käyttäessä poiketa huomattavasti perinteistä Macaulay-duraatiomallin implikoimista säännöistä. Ero tulee ennen kaikkea käytetyistä parametrien arvoista. Seuraavassa esimerkissä katsomme tarkemmin kuinka suojautumissäännöt riippuvat yhden parametrin - α:n - arvosta.

Taulukko 6. **Yhden faktorin mallilla ja perinteisellä duraatiolla immunisoidut portfoliot.** Yhden faktorin malli on Vasicekin (1977) korkorakennemalli. Parametrien arvot ovat seuraavat: $r^* = 0.1236$, $\sigma^2 = 0.0293$ and $\alpha = 0.5467$. Markkinoiden tuottokäyrän oletetaan vastaavan yhden faktorin mallin implikoimaa tuottokäyrää. Perinteinen duraatio on Macaulay-duraatio.

Malli	Jvk 1:n nimellisarvo	jvk 2:n nimellisarvo	Suojattavan jvk:n nimellisa.
	$\tau = 5$	$\tau = 10$	$\tau = 7$
Vasicek	24.74	89.16	100
Macaulay	51.39	50.15	100
	$\tau = 1/2$	$\tau = 2$	$\tau = 1$
Vasicek	54.40	47.13	100
Macaulay	64.35	35.59	100
	$\tau = 1/2$	$\tau = 1$	$\tau = 2$
Vasicek	-115.43	212.17	100
Macaulay	-180.83	281.00	100

Esimerkki 3. Korkorakennemallien antamat suojautumissäännöt riippuvat malleissa käytetyistä parametrien arvoista. Tässä esimerkissä tarkastelemme kuinka suojautuminen muuttuu kun muutamme Vasicekin mallissa yhden parametrin , α:n, arvoa.

Kuten luvussa 3.1 jo käsiteltiin, α:n arvo määrää, kuinka nopeasti hetkellisen koron odotetaan palautuvan kohti pitkän aikavälin keskiarvoaan. Suuri α:n arvo tarkoittaa, että lyhyt korko palautuu nopeasti kohti keskiarvoa. Vastaavasti pieni α:n arvo implikoi, että palautuminen kohti historiallista keskiarvoa on hidas. Ääripäänä on α:n arvo nolla, jolloin hetkellinen korko seuraa satunnaiskulkua: jokaisen hetkellisen koron muutoksen jälkeen tulevien korkojen odotus-arvo on nykyinen, muuttunut taso.

Taulukossa 7 on esitetty suojattuja portfolioita eri α:n arvoilla. Muut Vasicekin mallissa käytetyt parametrien arvot ovat samat kuin esimerkissä 2. Toinen poikkeus edelliseen esimerkkiin on, että nyt jokaisessa tapauksessa markkinoiden tuottokäyrä on vaakasuora. Tarkastelemme pelkästään tapausta, jossa pyrimme replikoimaan 7-vuoden velan sijoittamalla 5- ja 10-vuoden nollakuponkilainoihin.

Taulukosta 7 nähdään, että kun α:n arvo pienenee, sijoitamme enemmän 10-vuoden joukkovelkakirjaan ja vastaavasti vähemmän 5-vuoden joukkovelkakirjaan. Alfan arvolla 0.5 ostamme nimellis- ja markkina-arvoltaan enemmän 5-vuoden joukkovelkakirjoja kuin 10-vuoden, kun taasen alfan arvolla 0.05 sijoitamme nimellisarvoltaan vain murto-osan 5-vuoden joukkovelkakirjoihin.

Taulukko 7. α:n arvon vaikutus immunisoituun portfolioon. Parametrien arvot ovat seuraavat: $r^* = 0.1236$ ja $\sigma^2 = 0.0293$. α:n arvo vaihtelee taulukon osoittamalla tavalla. Markkinoiden tuottokäyrän oletetaan olevan jokaisessa tapauksessa vaakasuora. Immunisoidut portfoliot on tuotettu Vasicekin (1977) mallilla.

α:n arvo	JVK 1:n nimellisarvo	JVK 2:n nimellisarvo	Suojattavan JVK:n nimellisarvo
	$\tau = 10$	$\tau = 5$	$\tau = 7$
0.5	44.91	60.94	100
0.2	62.27	32.32	100
0.1	71.72	16.29	100
0.05	76.91	8.47	100

Esimerkki 4. Nyt siirrymme tarkastelemaan immunisaatiota kahden faktorin mallilla. Käytämme Longstaff ja Schwartzin kahden faktorin mallia, jossa faktoreina ovat hetkellinen korko ja volatiliteetti. Rakennamme immunisoidun portfolion periaatteessa samalla tavalla kuin aikaisemmin esitetyissä esimerkeissä. Nyt kuitenkin immunisoidun portfolion täytyy täyttää kahden rajoitteen sijasta kolme rajoitetta. Jotta kolmen yhtälön asettamat rajoitteet voidaan täyttää, käytämme kolme vaadetta replikoimaan yhtä joukkovelkakirjaa.

$$(13) \qquad N^1 P(\tau_1) + N^2 P(\tau_2) + N^3 P(\tau_3) = N^4 P(\tau_4)$$

$$(14) \qquad N^1 P_r(\tau_1) + N^2 P_r(\tau_2) + N^3 P_r(\tau_3) = N^4 P_r(\tau_4)$$

$$(15) \qquad N^1 P_V(\tau_1) + N^2 P_V(\tau_2) + N^3 P_V(\tau_3) = N^4 P_V(\tau_4)$$

Ensimmäinen rajoite on sama kuin kahden faktorin tapauksessa, vain vaateiden lukumäärä on muuttunut. Vaadimme, että replikoitavan ja replikoivien joukkovelkakirjojen markkina-arvot

ovat samat. Toinen rajoite on edelleen sama kuin Vasicekin mallin tapauksessa. Vaadimme, että ensimmäiset osittaisderivaatat hetkellisen koron suhteen ovat replikoitavalla ja replikoivilla joukkovelkakirjoilla samat. Kolmantena rajoitteena on, että ensimmäiset osittaisderivaatat volatiliteetin suhteet ovat samat.

Taulukossa 8 on esitetty immunisoidut portfoliot, jotka on saatu käyttämällä joko perinteistä duraatiota, Vasicekin yhden faktorin mallia tai Longstaffin ja Schwartzin kahden faktorin mallia. Kahdessa ensimmäisessä tapauksessa käytämme suojauksessa kahta nollakuponkilainaa.

Taulukossa 8 joukkovelkakirjojen maturiteetit vastaavat esimerkin 2 juoksuaikona paitsi, että kahden faktorin mallissa olemme ottaneet mukaan myös yhden viikon nollakuponkilainan. Valitsemme kolmanneksi vaateeksi viikon paperi, joka on lähellä käteistä. Oletamme, että markkinoiden tuottokäyrä vastaa Longstaffin ja Schwartzin mallin antamaa tuottokäyrää. Tuottokäyrä on esitetty kuviossa 2 (V=0.0002).

Macaulayn ja Vasicekin duraatiomallien antamat portfoliopainot vaateiden nimellisarvoina ilmaistuna ovat useimmissa tapauksissa varsin lähellä taulukon 6 painoja. Taulukon 6 esimerkissä markkinoiden tuottokäyrän olettiin vastaavan Vasicekin mallin antamaa korkorakennetta. Suurin ero portfoliossa on käytettäessä juoksuajaltaan pisimpiä nollakuponkilainoja. Kahden ja yhden faktorin korkorakennemallien implikoimat hintaerot kasvavat käytetyillä parametrien arvoilla nollakuponkilainojen juoksuajan kasvaessa. Tämä tuottaa eron immunisoituihin portfolioihin.

Kahden faktorin korkorakennemalli antamat nimellisarvot eroavat selvästi sekä Macaulayn että Vasicekin duraatiomallien antamista painoista. Osa erosta selittyy sillä, että kahden faktorin mallin tapauksessa suojautumisessa käytetään hyväksi myös lyhyttä eli viikon nollakuponkilainaa. Lyhyen nollakuponkilaina kappale- ja markkamäärät jäävät kuitenkin jokaisessa tapauksessa varsin pieniksi.

Viimeisessä tapauksessa, jossa pitää replikoida seitsemän vuoden nollakuponkilaina viiden ja kymmenen vuoden sekä viikon nollakuponkilainoilla pitkien papereiden määrät nousevat suuriksi. Näin tapahtuu, koska kymmenen vuoden nollakuponkilainalla hankitaan varoja päinvastoin kuin Macaulayn ja Vasicekin malleilla, joissa varoja sijoitetaan kymmenen vuoden nollakuponkilainaan.

Taulukossa 9 on tarkastelu tarkemmin suojautumisongelmaa, jossa seitsemän vuoden nollakuponkilaina pitää replikoida ensinnäkin kymmenen vuoden nollakuponkilainalla ja kahdella muulla lyhyemmällä nollakuponkilainalla. Ensimmäiseksi lyhyeksi nollakuponkilainaksi on nyt valittu kaikissa tapauksessa yhden vuoden nollakuponkilaina. Toisen lyhyen nollakuponkilainana juoksuaika on joko kaksi, neljä tai viisi vuotta.

Taulukosta 9 nähdään, että kahden ensimmäisen nollakuponkilainan kappale- ja markkamäärät kasvavat nopeasti, kun ensimmäisen replikoivan nollakuponkilainan juoksuaika kasvaa. Nimellisarvot kasvavat nopeasti, koska kahden pisimmän replikoivan joukkovelkakirjan positiot ovat vastakkaissuuntaiset kuten taulukon 8 esimerkissäkin. Yhden vuoden nollakuponkilainan määrä säilyy kaikissa tapauksissa pienenä. Kun seitsemän vuoden nollakuponkilainaa replikoidaan yhden, kahden ja 10-vuoden nollakuponkilainoilla, kahden faktorin mallin mukaan käytetyillä parametrien arvoilla riittää käytännössä, että käytämme vain 10-vuoden joukkovelkakirjaa. Yhden ja kahden vuoden nollakuponkilainojen määrät jäävät tässä tapauksessa erittäin pieniksi.

Taulukko 8. **Immunisoidut portfoliot perinteisellä duraatiomallilla, Vasicekin (1977) yhden faktorin mallilla ja Longstaffin ja Schwartzin (1992) kahden faktorin mallilla.** Yhden faktorin mallissa on käytetty seuraavia parametrien arvoja: $r^* = 0.1236$, $\sigma^2 = 0.0293$ and $\alpha = 0.5467$. Kahden faktorin mallissa on käytetty seuraavia faktoreiden ja parametrien arvoja: $r = 0.12$, $V = 0.0002$, $\alpha = 0.0038$, $\beta = 0.0124$, $\delta = 3.3209$, $\nu = 5.4722$, $\gamma = 6.56113$ and $\eta = 41.8827$. Tuottokäyrä vastaa kahden faktori mallin implikoimaa korkorakennetta.

Malli	Jvk 1:n nimellis-arvo	Jvk 2:n nimellis-arvo	Jvk 3:n nimellis-arvo	Tavoite-jvk:n nimellisarvo
Yksinker-tainen duraatio-malli	$N_{1/2}^1$	N_2^2	$N_{1/52}^3$	N_1^4
	62.40	32.70	-	100
	$N_{1/2}^1$	N_1^2	$N_{1/52}^3$	N_2^4
	-165.51	265.23	-	100
	N_5^1	N_{10}^2	$N_{1/52}^3$	N_7^4
	47.03	57.49	-	100
Yhden faktorin malli	$N_{1/2}^1$	N_2^2	$N_{1/52}^3$	N_1^4
	53.98	47.58	-	100
	$N_{1/2}^1$	N_1^2	$N_{1/52}^3$	N_2^4
	-113.44	210.16	-	100
	N_5^1	N_{10}^2	$N_{1/52}^3$	N_7^4
	43.69	63.06	-	100
Kahden faktorin malli	$N_{1/2}^1$	N_2^2	$N_{1/52}^3$	N_1^4
	23.39	84.82	-1.07	100
	$N_{1/2}^1$	N_1^2	$N_{1/52}^3$	N_2^4
	-28.04	118.23	1.41	100
	N_5^1	N_{10}^2	$N_{1/52}^3$	N_7^4
	1285.15	-2008.4	0.00	100

Taulukko 9. **Immunisoidut portfoliot perinteisellä duraatiomallilla, Vasicekin (1977) yhden faktorin mallilla ja Longstaffin ja Schwartzin (1992) kahden faktorin mallilla.** Yhden faktorin mallissa on käytetty seuraavia parametrien arvoja: $r^* = 0.1236$, $\sigma^2 = 0.0293$ and $\alpha = 0.5467$. Kahden faktorin mallissa on käytetty seuraavia faktoreiden ja parametrien arvoja: $r = 0.12$, $V = 0.0002$, $\alpha = 0.0038$, $\beta = 0.0124$, $\delta = 3.3209$, $\nu = 5.4722$, $\gamma = 6.56113$ and $\eta = 41.8827$. Tuottokäyrä vastaa kahden faktori mallin implikoimaa korkorakennetta.

Malli	Jvk 1:n nimellis-arvo	Jvk 2:n nimellis-arvo	Jvk 3:n nimellis-arvo	Tavoite-jvk:n nimellisarvo
Kahden faktorin malli	N_2^1	N_{10}^2	N_1^3	N_7^4
	- 0.17	136.33	0.01	100
	N_4^1	N_{10}^2	N_1^3	N_7^4
	349.24	-509.56	-0.01	100
	N_5^1	N_{10}^2	N_1^3	N_7^4
	7049.88	-11627.2	-0.00	100

3.3 Minkälaista duraatiomallia kannattaa käyttää ?

Luvuissa 3.1 ja 3.2 kävimme läpi kuinka mitata korkoriskiä ja kuinka suojautua siltä. Esityksen pääpaino on ollut jatkuva-aikaisten korkorakennemallien soveltamisessa, mutta käsittelimme myös perinteisiä duraatiomalleja. Tässä luvussa keskustelemme lyhyesti näiden mallien eri eroista.

Korkorakennemallit tarjoavat tavan mitata korkoriskiä. Korkorakennemalleihin liittyy useita etuja, mutta myös rajoitteita verrattuna perinteisiin duraatiomalleihin.

Korkorakennemallien käytön etuna on, että niiden avulla voidaan mitata useiden eri instrumenttien korkoriski konsistentisti. Sekä nollakuponkilainojen että korko-optioiden hinnoittelumalli voidaan eräissä tapauksissa johtaa samassa kehikossa. Tällöin samoja muuttujien ja parametrien arvoja voidaan käyttää eri instrumenttien korkoriskin mittaamisessa. Yhden lähestymistavan mallien avulla voimme esimerkiksi laskea duraatiot sekä joukkovelkakirjoille että korko-optioille.

Toinen korkorakennemallien etu on, että voimme tutkia helposti kuinka tietyn parametrin muutos vaikuttaa korkoriskiimme. Esimerkiksi Vasicekin (1977) mallin avulla voimme simuloida kuinka α parametrin muutokset vaikuttavat portfoliomme korkoriskiin. Lisäksi kahden faktorin mallien avulla voimme laskea riskimittari kahden faktorin suhteen. Longstaffin ja Schwartzin (1992) mallissa tämä tarkoittaa, että suojaudumme sekä hetkellisen koron että volatiliteetin muutosten suhteen.

Korkorakennemallien perustuviin duraatiomalleihin liittyy myös rajoitteita. Ensinnäkin mallien parametrien arvojen estimointi ei ole välttämättä yksinkertaista. Duraatiomallien hyvyys tulee myös riippumaan mallien parametrien arvojen estimoinnin hyvyydestä. Toiseksi mallit voivat olla varsin monimutkaisia. Vasicekin (1977) mallin parametrien tulkinta on hyvin selkeää, mutta esimerkiksi Longstaffin ja Schwartzin (1992) mallin

dynamiikan ymmärtäminen on jo huomattavasti vaikeampaa.

Ehdottomasti eniten käytetyt korkoriskin mittarit raha- ja joukkovelkakirjamarkkinoilla pohjautuvat perinteisiin duraatiomalleihin, esimerkiksi Macaulayn tai modifioituun duraatioon. Ne ovat yleensä yksinkertaisia laskea.

Perinteiset duraatiomallit pohjautuvat usein varsin rajoittuneeseen oletukseen korkorakenteen muutoksista. Esimerkiksi oletus siitä, että tuottokäyrä tekee vain paralelleja muutoksia on selvästi ristiriidassa todellisuuden kanssa. Jos kuitenkin yksinkertaisella ja halvemmalla mallilla päästään korkoriskin hallinnan kannalta tyydyttävään tulokseen, ei ole syytä siirtyä käyttämään teoreettisesti oikeampaan, mutta kalliimpaa ja hankalasti käytettävää mallia.

Eri duraatiomallien hyvyyttä on tarkasteltu myös empiirisesti. Valitettavasti täysin selvää johtopäätöstä tutkimuksista ei voida vetää. Brennan ja Schwartzin (1983), Ingersollin (1983) sekä Nelson ja Schaeferin (1983) tulosten mukaan perinteiset duraatiomallit toimivat korkoriskin suojautumisessa yhtä hyvin kuin monimutkaisemmatkin mallit. Toisaalta Gultekin ja Rogalski (1984), Elton, Gruber ja Nabar (1988) sekä Elton, Gruber ja Michaely (1990) esittävät, että useamman faktorin mallit toimivat paremmin kuin perinteiset duraatiomallit tai yhden faktorin mallit.

Ilmanen (1992) on tutkinut vast'ikään perinteistä duraatiota Yhdysvaltain korkoaineistolla. Hänen mukaansa perinteisten duraatiomallien kyky mitata korkoriskiä on parantunut viime aikoina. Yksi mahdollinen syy tähän on se, että paralellien tuottokäyrän muutosten merkitys on kasvanut Yhdysvaltain joukkovelkakirjamarkkinoilla. Näin Macaulay-duraatiomallin oletus tuottokäyrän muutoksista vastaa nykyisin paremmin todellisuutta kuin aikaisemmin.

Yllä mainitut tutkimukset ovat pääsääntöisesti käyttäneet Yhdysvaltain raha- ja joukkovelkakirjamarkkinoiden aineistoa.

Valitettavasti suomalaisella aineistolla tehtyjä vastaavia tutkimuksia ei ole tehty. Yksi syy tutkimusten puuttumisen on, että joukkovelkakirjamarkkinat ovat olleet Suomessa suhteellisen kehittymättömät. Voimme kuitenkin olettaa, että oletus paralelleista tuottokäyrän muutoksista pitää paremmin paikkansa suomalaisilla joukkovelkakirjamarkkinoilla kuin suomalaisilla rahamarkkinoilla.

4. JOHTOPÄÄTÖKSIÄ

Raha- ja joukkovelkakirjamarkkinoiden korkoinstrumenttien korkoriskin mittaamisessa duraatio on keskeinen käsite. Se mittaa vaateen hinnan herkkyyttä tuottokäyrän muutoksille.

Sijoittajan valittavana on useita erilaisia duraatiomalleja. Tässä esityksessä tarkasteltiin duraatiomalleja, jotka pohjautuvat jatkuva-aikaisiin korkorakennemalleihin. Ne tarjoavat vaihtoehtoisen tavan mitata korkoriskiä. Näiden mallien etuna on, että ne mahdollistavat helposti duraation laskemisen myös johdannaisinstrumenteille. Niiden avulla on myös helppo tarkastella korkoprosessin ominaisuuksien muuttumisen vaikutusta lainasalkkumme riskiominaisuuksiin. Toisaalta näiden mallien käyttö vaatii suurempaa osaamista kuin esimerkiksi Macaulay- duraatiomallin käyttäminen.

Luvussa kolme tarkastelimme korkoriskiltä suojattujen portfolioiden rakentamista. Yksi luvun opetuksista oli, että eri mallien antamat suojautusmissäännöt voivat vaihdella varsin paljon. Lisäksi sama mallikin voi antaa erilaisia tuloksia riippuen käytetyistä parametrien arvoista. Tämä asettaa sijoittajat valintatilanteen eteen: Mitä mallia ja/tai mitä parametrien arvoja käyttää ?

Kysymys on pitkälti empiirinen. Valitettavasti sellaista empiiristä tutkimusta, joka antaisi tähän yksiselitteisen vastauksen, ei ole vielä tehty Suomen aineistolla. Tavallisin ja turvallisin valinta on useimmissa tapauksissa edelleen Macaulayn duraatiomalli tai modifioitu duraatiomalli. Niitä on helppo

soveltaa kuponkikorkoisille joukkovelkakirjoille. Ne on myös helppo ymmärtää intuitiivisesti.

Perinteiset duraatiomallit ovat vähimmäisvaatimus käytännössä. Mentäessä syvemmälle raha- ja joukkovelkakirjalainamarkkinoiden korkoriskin mittaamisessa jatkuva-aikaiset korkorakennemallit tarjoavat yhden vaihtoehdon. Ne vaativat suurempaa tieto-taitoa kuin perinteiset duraatiomallit, mutta vastapainona ne voivat tarjota joustavan kehikon eri vaateiden korkoriskin mittaamiselle.

LIITTEET

Liite 1. Longstaffin ja Schwartzin korkorakenneyhtälön kertoimet

Longstaffin ja Schwartzin (1992) kahden faktorin mallissa hetkellinen korko ja hetkellisen koron muutosten varianssi noudattavat seuraavia prosesseja:

$$(A1)\qquad dr = \left(\alpha\gamma + \beta\eta - \frac{\beta\delta - \alpha\xi}{\beta - \alpha} r - \frac{\xi - \delta}{\beta - \alpha} V \right) dt +$$

$$\alpha\left(\frac{\beta r - V}{\alpha(\beta - \alpha)}\right)^{1/2} dZ_2 + \beta\left(\frac{V - \alpha r}{\beta(\beta - \alpha)}\right)^{1/2} dZ_3$$

$$(A2)\qquad dV = \left(\alpha^2\gamma + \beta^2\eta - \frac{\alpha\beta(\delta - \xi)}{\beta - \alpha} r - \frac{\beta\xi - \alpha\delta}{\beta - \alpha} V\right)dt +$$

$$\alpha^2\left(\frac{\beta r - V}{\alpha(\beta - \alpha)}\right)^{1/2} dZ_2 + \beta^2\left(\frac{V - \alpha r}{\beta(\beta - \alpha)}\right)^{1/2} dZ_3 .$$

Longstaffin ja Schwartzin mallin korkorakenneyhtälö on seuraavaa muotoa:

(A3) $$R(t,\tau) = -(\kappa\tau + 2\gamma \ln A(\tau) + 2\eta \ln B(\tau) + C(\tau)r(t) + D(\tau)V(t))/\tau,$$

missä kertoimet $A(\tau)$, $B(\tau)$, $C(\tau)$ ja $D(\tau)$ on esitetty alla.

(A4) $$A(\tau) = \frac{2\phi}{(\delta + \phi)(\exp(\phi\tau)-1) + 2\phi},$$

(A5) $$B(\tau) = \frac{2\psi}{(\nu + \psi)(\exp(\psi\tau)-1) + 2\psi},$$

(A6) $$C(\tau) = \frac{\alpha\phi(\exp(\psi\tau)-1)B(\tau) - \beta\psi(\exp(\phi\tau)-1)A(\tau)}{\phi\psi(\beta - \alpha)},$$

(A7) $$D(\tau) = \frac{\psi(\exp(\phi\tau)-1)A(\tau) - \phi(\exp(\psi\tau)-1)B(\tau)}{\phi\psi(\beta - \alpha)},$$

(A8) $$\nu = \xi + \lambda,$$

(A9) $$\phi = (2\alpha + \delta^2)^{1/2},$$

(A10) $$\psi = (2\beta + \nu^2)^{1/2},$$

(A11) $$\kappa = \gamma(\delta + \phi) + \eta(\nu + \psi).$$

Liite 2. Macaulay-duraatiomalli

Määrittelimme kuponkikorkoisen joukkovelkakirjan duraation nollakuponkilainojen duraatioiden avulla seuraavasti:

(A12) $$D = \sum_{\tau=1}^{K} \frac{P_\tau F_\tau}{P} D_\tau.$$

Seuraavassa näytämme kuinka saamme perinteisen joukkovelkakirjan

Macaulay-duraation, kun sijoitamme D_t:n tilalle vastaavan maturiteetin ja käytämme hyväksi nykyarvolauseita.

Olkoon P_t hetkellä t erääntyvän yhden yksikön (markan) nollakuponkilainan nykyarvo eli hinta. Vastaavasti olkoon C_t joukkovelkakirjan kassavirta hetkellä t. Kassavirta koostuu mahdollisesti sekä korkomaksuista että lyhennyksistä. Joukkovelkakirjan hinta, P, on puolestaan $\sum P_t C_t$. Tällöin yhtälö (A12) voidaan kirjoittaa seuraavasti:

$$(A13) \qquad D_{mac} = \frac{\sum P_t C_t t}{\sum P_t C_t}$$

Yhtälö (A13) antaa Macaulay-duraatiom kuponkikorkoiselle joukkovelkakirjalle. Macaulay-duraatio esitetään usein myös käyttäen hintojen sijasta joukkovelkakirjan jatkuva-aikaisesti laskettuja sisäisiä korkokantoja. Tällöin yhtälö (A13) voidaan kirjoittaa seuraavasti:

$$(A14) \qquad D_{mac} = \frac{\sum e^{-yt} C_t t}{\sum e^{-yt} C_t},$$

missä y on joukkovelkakirjan sisäinen korkokanta ilmaistuna jatkuva-aikaisena korkona. Edellä esitetyt kaksi duraatiota ovat samat vain, jos nykyarvolausekkeen eri maturiteetin diskonttauskorot vastaavat y:tä. Tämä edellyttää, että tuottokäyrä on vaakasuora.

Käytännön markkinasovellutuksissa käytetään useimmiten diskreetin ajan korkonoteerauksia. Tällöin Macaulay-duraatiomalli voidaan kirjoittaa seuraavasti:

$$(A15) \qquad D_{mac} = \frac{\left[\sum_{t=1}^{T} \frac{tC_t}{(1+y)^t}\right]}{\left[\sum_{t=1}^{T} \frac{C_t}{(1+y)^t}\right]},$$

missä y on joukkovelkakirjan sisäinen korkokanta ilmaistuna diskreetin ajan korkona. Macaulay-duraatiomallin yhtenä etuna on se, että se on varsin helppo laskea. Tarvitaan tietää ainoastaan markkinahinnasta määräytyvä joukkovelkakirjan sisäinen korkokanta ja kassavirtojen suuruus ja ajoitus.
Yksinkertaisuuden hinta on rajoittava oletus tuottokäyrän muutoksista. Macaulay-duraatiossa oletetaan, että tuottokäyrä on vaakasuora ja, että tuottokäyrä tekee vain paralelleja muutoksia ts. myös muutoksen jälkeinen tuottokäyrä on vaakasuora.

Macaulay-duraatiomallin sijasta usein käytetään ns. modifioitua duraatiomallia. Modifioidun duraation ja Macaulay-duraation välinen yhteys on $D_{mod} = D_{mac}/(1+y)$. Jatkuva-aikaisilla koroilla esitettynä $D_{mod} \longrightarrow D_{mac}$.

LÄHDELUETTELO

Aaltonen, Ari (1986): Duraatioanalyysi pankkien korkoriskin hallinnassa. Suomen Pankin rahapolitiikan osaston keskustelualoitteita.

Ahn, Chang Mo ja Howard E. Thompson (1988): Jump-Diffusion Processes and the Term Structure of Interest Rates, Journal of Finance, vol. XLIII, s. 155 - 174.

Black, Fischer ja Miron Scholes (1973): The pricing of options and corporate liablities, Journal of Political Economy, vol. 81, pp. 637 - 654.

Brennan, Michael J. ja Eduardo S. Schwartz (1983): Duration, bond pricing and portfolio management, teoksessa Innovations in Bond Portfolio Management, toimittajat George Kaufman, G Bierwag ja Alden Toevs. JAI Press,

Inc., Greenwich, Conneticut.

Brennan, Michael J. ja Eduardo S. Schwartz (1982): An Equilibrium Model of Bond Pricing and a Test of Market Efficiency, Journal of Financial and Quantative Analysis, vol. XVII, pp. 301-329.

Brennan, Michael J. ja Eduardo S. Schwartz (1980a): Analyzing convertible bonds, Journal of Financial and Quantitative Analysis, vol. 15, pp. 907 - 929.

Brennan, Michael J. ja Eduardo S. Schwartz (1980b): Conditional Predictions of Bond Prices and Returns, Journal of Finance, vol. 35, pp. 405 - 419.

Brennan, Michael J. ja Eduardo S. Schwartz (1979): A Continuous-Time Approach to the Pricing of Bonds, Journal of Banking and Finance, vol. 3, pp. 135 - 155.

Brennan, Michael J. ja Eduardo S. Schwartz (1977): Savings bonds, retractable bonds and callable bonds, Journal of Financial Economics, vol. 5, pp. 67 - 88.

Cox, John C., Jonathan E. Ingersoll ja Stephen Ross (1985): A Theory of the Term Structure of Interest Rates, Econometrica, vol. 53, s. 358 - 407.

Cox, John C., Jonathan E. Ingersoll ja Stephen Ross (1980): An analysis of variable rate loan contracts, Journal of Finance, vol. 35, pp. 389 - 403.

Dothan, L. Uri (1978): On the Term Structure of Interest Rates, Journal of Financial Economics, vol. 6, s. 59-69.

Elton, Edwin J., Martin J. Gruber ja Roni Michaely (1990): The Structure of Spot Rates and Immunization, Journal of Finance, vol. 45, pp. 629 - 642.

Elton, Edwin J., Martin J. Gruber ja Prafulla G. Nabar (1988): Bond Returns, Immunization and The Return Generating Process, Studies in Banking and Finance, vol. 5, pp. 125 - 154.

Gultekin, N. Bullet ja Richard J. Rogalski (1984): Alternative Duration Specifications and the Measurement of Basis Risk: Empirical Tests, Journal of Business, vol. 57, pp. 241 - 264.

Ilmanen, Antti (1989): Duraatioanalyysin käyttö joukkovelkakirjan korkoriskin arvioinnissa ja hallinnassa,

Suomen Pankin keskustelualoitteita no. 18/89.

Ilmanen, Antti (1992): How Well Does Duration Measure Interest Rate Risk ?, Journal of Fixed Income, March 1992, pp. 43 - 51.

Ingersoll, Jonathan E. (1983): Is immunization feasible ?: Evidence from the CRSP data, teoksessa Innovations in Bond Portfolio Management, toimittajat George Kaufman, G Bierwag ja Alden Toevs. JAI Press, Inc., Greenwich, Conneticut.

Longstaff, Francis A. (1989): A Nonlinear General Equilibrium Model of the Term Structure of Interest Rates, Journal of Financial Economics, vol. 23, pp. 195 - 224.

Longstaff, Francis A. ja Eduardo Schwartz (1992): Interest-Rate Volatility and the Term structure: A Two-Factor General Equilibrium Model, julkaistaan Journal of Finance.

Marsh, Terry and Eric Rosenfeld (1983): Stochastic Processes for Interest Rates and Equilibrium Bond Prices, Journal of Finance, vol. 38, pp. 635 - 646.

Merton, Robert C. (1973): Theory of rational option pricing, Bell Journal of Economics and Management Science, vol. 4, pp. 141 - 183

Murto, Risto (1992): Testing Continuous Time Models of the Term Structure of Interest Rates in the Finnish Money Markets, ETLA Keskusteluaiheita, no. 392.

Nelson, Jeffrey ja Stephen Schafer (1983): The dynamics of the term structure and alternative portfolio immunization strategies, teoksessa Innovations in Bond Portfolio Management, toimittajat George Kaufman, G Bierwag ja Alden Toevs. JAI Press, Inc., Greenwich, Conneticut.

Niskanen, Mikko (1991): Velkakirjojen hinnoittelu arbitraasimallissa, Suomen Pankin keskustelualoitteita, no. 1/91.

Rantala, Olavi (1988): Tasapainokorko, korkopolitiikka ja korkojen aikarakenne, Liiketaloudellinen Aikakauskirja, pp. 147 -161.

Rantala, Olavi (1989): HELIBOR-korkojen aikasarjaprosessi ja aikarakenne, Liiketaloudellinen Aikakauskirja, pp. 142-155.

Richard, Scott F. (1978): An arbitrage model of the term structure of interest rates, Journal of Financial

Economics, vol. 6, pp. 33 - 57.

Rogers, John (1992): Rahalaitosten korkoriskin hallinta, ETLA B:76.

Vanhanen, Vesa (1988): Korkoriskin hallinta velka-kirjamarkkinoilla. Suomen Pankin keskustelualoitteita, no. 27/88.

Vasicek, Oldrich (1977): An Equilibrium Characterization of the Term Structure, Journal of Financial Economics, vol. 5, pp. 177 - 188.

E L I N K E I N O E L Ä M Ä N T U T K I M U S L A I T O S (ETLA)
THE RESEARCH INSTITUTE OF THE FINNISH ECONOMY
LÖNNROTINKATU 4 B, SF-00120 HELSINKI

Puh./Tel. (90) 609 900
Int. 358-0-609 900

Telefax (90) 601 753
Int. 358-0-601 753

KESKUSTELUAIHEITA - DISCUSSION PAPERS ISSN 0781-6847

No 384 ROBERT HAGFORS, Kulutusmenojen arviointia kotitaloustyypeittäin Suomessa vuosille 1960-1985. 04.11.1991. 30 s.

No 385 GEORGE F. RAY, Innovations Diffused - A Random Walk in History. 15.11.1991. 46 p

No 386 HARRI LUUKKANEN, Diffusion of Numerically Controlled Machine Tools in Finnish Engineering Industry. 18.11.1991 37 p.

No 387 JUHA KETTUNEN, A Programme for Estimating Nonlinear Maximum Likelihood Models with an Application to Duration Models of Unemployment. 27.11.1991. 25 p.

No 388 JUKKA LASSILA, Tax Threats and Wage Formation. 10.12.1991. 23 p.

No 389 WILLIAM C. BRAINARD - JAMES TOBIN, On the Internationalization of Portfolios. 10.12.1991. 39 p.

No 390 RISTO MURTO, Duration, Immunization and Models of the Term Structure of Interest Rates. 27.12.1991. 31 p.

No 391 VESA KANNIAINEN, Diffusion, R&D and Public Policy: Is it Better to be a First Mover or Fast Second? 14.01.1992. 25 p.

No 392 RISTO MURTO, Testing Continuous Time Models of the Term Structure of Interest Rates in the Finnish Money Market. 22.01.1992. 42 p.

No 393 RAIMO LOVIO, The Influence of Foreign Companies on the Birth and Development of the Finnish Electronics Industry. 29.01.1992. 9 p.

No 394 JUHA KETTUNEN, Time-Dependent in Semi-Parametric Models of Unemployment Duration. 05.02.1992. 27 p.

No 395 OLAVI LEHTORANTA, Estimating Stocks of Fixed Capital: Methods used in Different Countries. 13.02.1992. 73 p.

No 396 HANNU JAAKKOLA, The Diffusion of Information Technology in Finnish Industry: State-of-the-art & Analysis. 14.02.1991. 33 p.

No 397 Elinkeinoelämän Tutkimuslaitoksen toiminta vuonna 1991. 25.02.1992.

No 398 OLAVI RANTALA, An Econometric Diffusion Model of Exchange Rate Movements within a Band - Implications for Interest Rate Differential and Credibility of Exchange Rate Policy. 06.03.1992. 19 p.

No 399 MARKKU KOTILAINEN, Exchange Rate Unions: A Comparison to Currency Basket and Floating Rate Regimes - A Three-Country Model. 09.03.1992. 120 p.

No 400 VEIJO KAITALA - MATTI POHJOLA, Acid Rain and International Environmental Aid: A Case Study of Transboundary Air Pollution Between Finland, Russia and Estonia. 23.03.1992. 15 p.

No 401 JUHANI TURKKILA, Tuloverotuksen reaalinen kiristyminen Suomessa. 22.04.1992. 36 s.

No 402 OLAVI RANTALA - PAAVO SUNI, The European Economy, Medium Term Perspectives. 24.04.1992. 26 p.

No 403 RITA ASPLUND, Education, Experience and Earnings in Finland: Empirical Evidence from a Cross Section of Individuals. 05.05.1992. 33 p.

No 404 RITA ASPLUND, Education, Experience and Earnings in Finland: Data Analysis and Complementary Estimation Results. 05.05.1992. 58 p.

No 405 RITA ASPLUND, Human Capital Earnings Functions: A Theoretical Introduction. 05.05.1992. 33 p.

No 406 MIKA WIDGRÉN, A Game Theoretic Analysis of the Nordic Coalition's Role in the Decision Making of the EC Council of Ministers. 07.05.1992. 21 p.

No 407 OLAVI RANTALA, Luottotappioriskin hinnoittelu. 01.06.1992. 30 s.

No 408 MARKKU KOTILAINEN, Euroopan raha- ja talousunioni ja Suomi. (The European Economic and Monetary Union and Finland). 25.06.1992. 31 s.

No 409 RISTO MURTO - TEEMU VÄÄNÄNEN, Linear and Nonlinear Dependence in the Finnish Forward Rate Agreement Markets. 03.08.1992. 29 p.

No 410 MARKKU LAMMI, An Imperfect Competition Model in an Industry with Differentiated Domestic and Foreign Products. 24.08.1992. 11 p.

No 411 RISTO MURTO, Korkorakennemallien käyttö korkoriskin arvioinnissa ja hallinnassa. 28.08.1992. 41 s.

Elinkeinoelämän Tutkimuslaitoksen julkaisemat "Keskusteluaiheet" ovat raportteja alustavista tutkimustuloksista ja väliraportteja tekeillä olevista tutkimuksista. Tässä sarjassa julkaistuja monisteita on rajoitetusti saatavissa ETLAn kirjastosta tai ao. tutkijalta.
Papers in this series are reports on preliminary research results and on studies in progress; they can be obtained, on request, by the author's permission.

E:\sekal\DPjulk.chp/28.08.1992