

Keskusteluaiheita Discussion papers

Heikki Vajanne - Eero Pylkkänen

EKONOMETRISEN MALLIN REDUSOIDUN
MUODON JA RATKAISUN HERKKYYDESTÄ
MUUTETTAESSA MALLIN RAKENNE-
MUODON KERTOIMIA

No. 97

31.12.1981

This series consists of papers with limited circulation, intended to stimulate discussion. The papers must not be referred or quoted without the authors' permission.



SISÄLLYSLUETTELO

1. JOHDANTO	1
2. ETLAN KOKONAISTALOUDELLISESTA MALLISTA	4
2.1. ETLAn mallin rakennemuodosta	4
2.2. ETLAn mallin redusoidusta muodosta	10
2.3. Mallin parametrimuutoksista	14
3. MALLIN RAKENNUMUODON YHDEN PARAMETRIMUUTOKSEN VAIKUTUKSET	18
3.1. Parametrimuutoksen vaikutus redusoidun muodon kertoimiin	18
3.2. Vastaavuus kerroinparametri- ja virhetermi- muutosten välillä	25
3.3. Parametrimuutoksen vaikutus mallin ratkaisuun	27
3.4. Redusoidun muodon kertoimien suhteellisista muutoksista	30
3.5. Eksogeenisen muuttujan kertoimen muutos	42
3.6. Esimerkkejä	47
4. SIMULTAANIMALLIN OSITTAIN REDUSOIDUT MUODOT	65
4.1. Johdanto	65
4.2. Merkintöjä	68
4.3. Siirtyminen osittain redusoidusta muodosta täysin redusoidun muodon suuntaan : supistus- operaatio S	71
4.4. Siirtyminen osittain redusoidusta muodosta rakennemuodon suuntaan : lavennusoperaatio L	77
4.5. Siirtyminen osittain redusoidusta muodosta toiseen osittain redusoituun muotoon : vaihto-operaatio V	82
5. USEAN PARAMETRIMUUTOKSEN VAIKUTUKSISTA	88
5.1. REM-kertoimien tulkinta OREM-kertoimina	89
5.2. Esitettyjen operaatioiden väliset yhteydet	91
5.3. Esimerkki OREM-käsitteiden soveltamisesta : ratkaisun herkkyys eksogenisoiittaessa osa yhtälöistä	107
5.4. Esimerkkejä	110

KIRJALLISUUSLUETTELO

LIITTEET

1. JOHDANTO

Tässä kirjoituksessa tarkastellaan olemassa olevan ekonometrisen mallin käyttöön liittyviä herkkyyšnäkökohtia. Lähtökohtana on lineaarisen mallin tunnettu rakennemuoto, sitä vastaava redusoitu muoto sekä mallin perusratkaisu, joka ajatellaan saaduksi sijoittamalla mallin ennaltamäärätyille muuttujille ja virhetermeille tietyt arvot ja ratkaisemalla sitten malli endogeenisten muuttujien suhteen.

Kun mallin rakennemuodon parametrien estimaatit syystä tai toisesta muuttuvat, tällöin muuttuvat yleensä myös mallin redusoidun muodon kertoimet sekä mallin perusratkaisu. Aikaisemmat mallin redusoidun muodon ja ratkaisun perusteella tehdyt johtopäätökset eivät luonnollisestikaan voi enää pitää sellaisinaan paikkaansa muutosten jälkeen. Tähän ilmeiseen tosiasiaan voi suhtautua eri tavoin. Yksi tapa on olla kiinnittämättä asiaan erityistä huomiota, koska "muutokset ovat käytännössä joka tapauksessa hyvin lieviä" ja koska "aikaisemmat tulokset pitävät siis edelleenkin likimäärin paikkansa". Toista äärimmäisyyttä edustava saattaa hylätä kokonaan aikaisemmat tulokset ja johtaa muuttuneesta rakennemuodosta lähtien uuden redusoidun muodon ja ratkaisun.

Ensin mainittu asenne voi joissakin tilanteissa olla hyvinkin puolusteltavissa, mutta yleisesti ottaen muutosten leimaaminen merkityksettömiksi pelkästään arvioijan hyvän mallintuntemuksen tai intuition perusteella on varsin arvelut-

tavaa toimintaa. Jälkimmäinen asenne taas merkitsisi käytännössä usein turhan työn tekemistä, kun laskennallisesti helpompiakin ratkaisuja olisi olemassa.

Mikäli nimittäin rakennemuodossa tapahtuvat muutokset eivät ole aivan totaalisia, on järkevä kompromissi usein löydettävissä ääriasenteiden välistä: pidetään lähtökohtana olemassa olevia tietoja redusoidusta muodosta ja ratkaisusta ennen rakennemuodossa tapahtuneita muutoksia, mutta pyritään korjaamaan ne vastaamaan mahdollisimman hyvin uutta asiaintilaa.

Tässä tutkimuksessa tarkastellaan nimenomaan sitä, millä tavoin alkuperäisiä redusoidun muodon kertoimia ja mallin ratkaisua on korjattava, kun alkuperäisessä rakennemuodossa tapahtuu jokin tai joitakin pienehköjä muutoksia. Aivan aluksi esitellään tutkimuksen taustalla oleva ETLAn kokonais-taloudellinen malli ja sovitaan käytettävistä notaatioista. Sen jälkeen tarkastellaan mallin rakennemuodon yhden parametrimuutoksen vaikutuksia, kun muutos tapahtuu ensiksi endogeenisten muuttujien kerroinmatriisissa ja sitten ennaltamäärättyjen muuttujien kerroinmatriisissa.

Tarkastelun tulokset ovat osaksi ennestäänkin hyvin tunnettua asiaa - esim. mallin inverssin muuttuminen käännettävän matriisin yhden elementin muuttuessa - , mutta tuttujenkin tulosten johdot on katsottu aiheelliseksi kirjoittaa verraten yksi-

tyiskohtaisesti näkyviin. Erityistä huomiota läpi koko kirjoituksen on kiinnitetty siihen, miten sama muutos mallin ratkaisuun voi syntyä aivan erityyppisten rakennemuodon muutosten seurauksena. Näiden eri muutosten välisten vastavuukusten selvittämisestä voidaan odottaa olevan hyötyä esim. ETLAn ennusteiden laadintakäytännön kannalta.

Kirjoituksen loppupuolella tarkastelua laajennetaan käsittelemään myös usean parametriestimaatin samanaikaisen muuttamisen eräitä tärkeitä erikoistapauksia. Erityisen kiinnostavina tapauksina tarkastellaan mallin yhtälön ns. eksogenisoinnin ja toisaalta mallin muuttujan ns. endogenisoinnin vaikutuksia mallin redusoituun muotoon ja ratkaisuun. Näiden tapausten tehokkaan käsittelyn edellytyksenä on luvussa 4 ensin esitelty mallin ns. osittain redusoidut muodot ja niihin liittyvät vaihto-operaatiot.

2. ETLAN KOKONAISTALOUDELLISESTA MALLISTA

2.1. ETLAn mallin rakennemuodosta

Tarkastellaan aluksi ETLAn mallin rakennemuotoa. Liitteessä 1 on lyhyt kuvaus mallin maaliskuun 1981 mukaisesta versios-
ta. Perusteellisin mallin kuvaus on Vartia (1974), tuoreem-
pi mutta suppeampi ja lähinnä ATK-orientoitunut kuvaus on
Vajanne, Pylkkänen ja Salmi (1980).

ETLAn malli on luonteeltaan differenssimalli, ts. mallin
muuttujat ovat pääsääntöisesti prosenttimuutosmuuttujia.
Osa mallin yhtälöistä on historiallisen datan perusteella
estimoituja käyttäytymisyhtälöitä, osa taas puhtaita iden-
titeettejä, jotka seuraavat suoraan muuttujien määritelmis-
tä tai kuvaavat sovellettua tilastointikäytäntöä. Osa iden-
titeeteistä on tämän luokittelutavan rajatapauksia, kuten
esim. veroyhtälö. Muita kuin käyttäytymisyhtälöitä kutsu-
taan myös määritelmäyhtälöiksi.

Mallissa on tällä hetkellä 74 yhtälöä, joista varsinaisia
käyttäytymisyhtälöitä on 13. Ennaltamäärättyjä muuttujia on
64, joista aitoja eksogeenisiä on 41.

Mallin linearisoidun version rakennemuoto voidaan kirjoittaa
seuraavasti¹⁾:

1) Käytetyn notaation Γ_t -matriisia vastaa muissa ETLAn mal-
lin kuvauksissa notaatio $I-A_t$.

$$(1) \quad \Gamma_t y_t = B_t z_t + d_t,$$

jossa

y_t on mallin endogeenisten muuttujien vektori ajanhetkellä t ,

Γ_t on endogeenisten muuttujien kerroinmatriisi ajanhetkellä t ,

z_t on ennaltamäärättyjen muuttujien vektori ajanhetkellä t ,

B_t on ennaltamäärättyjen muuttujien kerroinmatriisi ajanhetkellä t ,

d_t on virhetermien vektori ajanhetkellä t

ja alaindeksi t viittaa tarkasteluajankohtaan (kalenterivuosi).

Yhtälösystemin kerroinmatriisit ja muuttujavektorit ovat (alaindeksiä t ei ole kirjoitettu näkyviin):

$$\Gamma = (\gamma_{ij}), \quad i, j = 1, \dots, n,$$

$$B = (\beta_{ik}), \quad i = 1, \dots, n \text{ ja } k = 1, \dots, m,$$

$$y = (y_i), \quad i = 1, \dots, n,$$

$$z = (z_k), \quad k = 1, \dots, m \text{ ja}$$

$$d = (d_i), \quad i = 1, \dots, n.$$

Yhtälöiden lukumäärä on siis n ja ennaltamäärättyjen muuttujien, ts. aitojen eksogeenisten sekä mallin viivästettyjen muuttujien, lukumäärä on m .

Mallin yhtälöt on normeerattu ja järjestetty siten, että endogeenisen kerroinmatriisin Γ_t diagonaalielementit ovat ykkösiä, ts.

$$\gamma_{ii} = 1, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Jatkoa ajatellen kirjoitetaan mallin rakennemuoto komponentteittain sekä suoritetaan eräitä osituksia. Yhtälösystemi (1) on komponenttimuodossa¹⁾:

$$(2) \quad \sum_{j \in N} \gamma_{ij} y_j = \sum_{k \in M} \beta_{ik} z_k + d_i, \quad i \in N,$$

missä $N = \{1, 2, \dots, n\}$ on endogeenisten muuttujien tai yhtälöiden indeksit,

ja $M = \{1, 2, \dots, m\}$ on ennaltamäärättyjen muuttujien indeksit.

Mallin kaikki käyttäytymisyhtälöt ovat prosentuaalisille muutoksille kirjoitettuja lineaarisia lausekkeita. Myös mallin useimmat identiteetit ovat prosentuaalisille muutoksille kirjoitettunakin lineaarisia lausekkeita. Esimerkiksi tasoissa lausuttu additiivinen identiteetti kuten "kokonaiskulutus on yksityinen kulutus plus julkinen kulutus", ts.

$$(3) \quad \tilde{C} = \tilde{C}_{pr} + \tilde{C}_g$$

1) Komponenttiesityksistä on luettavuuden parantamiseksi jätetty pois alaindeksi t silloin kun menettelystä ei voi aiheutua sekaannuksia. Samoin on menetelty useiden matriiesitystenkin kohdalla.

on %-muutosmuotoon kirjoitettuna¹⁾

$$(4) \quad C = (\tilde{C}_{pr}/\tilde{C})_{-1} C_{pr} + (\tilde{C}_g/\tilde{C})_{-1} C_g,$$

missä esim. muuttujan C_{pr} kerroin on vuosittain muuttuva, tarkasteluvuotta edeltävän vuoden tasoista laskettu painokerroin, vrt. liite 1.

Ongelman tuottavat tasoissa lausuttuina multiplikatiiviset identiteetit, kuten

$$(5) \quad \tilde{C} = \tilde{c} \cdot \tilde{p}_c,$$

ts. kulutuksen arvo on määrä kertaa hinta.

Kun kaavan (5) identiteetti kirjoitetaan prosenttimuutosmuuttujille, saadaan

$$(6) \quad C = c + p_c + .01cp_c \\ = c + (1 + .01c)p_c.$$

Tässä esimerkissä C , c ja p_c ovat kaikki endogeenisiä muuttujia.

1) Muuttuja \tilde{C} tarkoittaa kokonaiskulutuksen tasoa. C ilman tildeä (\sim) on vastaava prosenttimuutos, siis

$$C = 100 \left(\frac{\tilde{C} - \tilde{C}_{-1}}{\tilde{C}_{-1}} \right) = 100 \left(\frac{\tilde{C}}{\tilde{C}_{-1}} - 1 \right).$$

Huomataan, että lausekkeessa (6) muuttujan p_c kerroin ei ole riippumaton endogeenisten muuttujien mallin ratkaisussa saamista arvoista. Järkevä tapa väistää tämä epälineaarisuus on approksimoida kerrointa $(1 + .01c)$ luvulla yksi, koska p_o kerroin poikkeaa ykkösestä käytännössä yleensä hyvin vähän. Juuri tämänkaltaisella menettelyllä päädytään ETLAn mallin linearisoituun versioon (1).

Yhteenvetona voidaan todeta, että matriiseissa Γ_t ja B_t on mukana useantyyppisiä kertoimia:

- käyttäytymisyhtälöiden estimoidut parametrit,
- arvo-hinta-määrä-tyyppisissä identiteeteissä esiintyvät kertoimet (ks. (6)),
- painokertoimia sisältävien identiteettien ajanjaksosta toiseen muuttuvat kertoimet (ks. (4)),
- eräät erikoistyyppiset kertoimet, esimerkiksi mallin veroyhtälön kullekin ajanjaksolle erikseen arvioitavat parametrit.

Joissakin tilanteissa on tarpeen erottaa virhetermivektorin d_t ne komponentit, jotka liittyvät mallin käyttäytymisyhtälöihin, niistä komponenteista, jotka liittyvät mallin identiteetteihin. Tästä syystä otetaan käyttöön symbolit R ja I : olkoon R käyttäytymisyhtälöiden indeksien joukko ja I määritelmäyhtälöiden indeksien joukko, jolloin

$$R \cup I = N$$

$$R \cap I = \emptyset.$$

Mallin identiteetteihin liittyvät jäännöstermit d_i , $i \in I$, voidaan po. yhtälöiden luonteesta johtuen olettaa nolliksi. Ottamalla tämä huomioon ja osittamalla yhtälösystemi (2) voidaan mallin rakennemuoto kirjoittaa

$$(7) \quad \begin{cases} \sum_{j \in N} \gamma_{ij} y_j = \sum_{k \in M} \beta_{ik} z_k + d_i, & i \in R \\ \sum_{j \in N} \gamma_{ij} y_j = \sum_{k \in M} \beta_{ik} z_k, & i \in I \end{cases}$$

Mallin käyttäytymisyhtälöihin liittyvien jäännöstermien d_i , $i \in R$, tulkinta vaihtelee tilanteesta riippuen. Ensinnäkin ne voidaan tulkita tavanomaisiksi regressioyhtälöihin liittyviksi stokastisiksi jäännösvirheiksi. Toisinaan on kuitenkin perusteltua tulkita d_i (osaksi tai kokonaan) yhtälöön i liittyväksi additiiviseksi korjaustekijäksi, jonka avulla mallin käyttäjä yrittää ennustetilanteessa korjata po. yhtälöä ennustetilanteen erityispiirteitä paremmin vastaavaksi. Tällaisen korjauksen suorittaminen on asiallisesti samaa kuin vastaavan siirron suorittaminen po. yhtälön vakiotermeille. Itse asiassa sama vaikutus mallin ratkaisuun saataisiin aikaan muuttamalla eksogeenisen kerroinmatriisin B_t yhtä elementtiä (vakiota eli muuttujaa $z_1 \equiv 1$ vastaavalla sarakkeella ja po. yhtälöä vastaavalla rivillä i). Täten myös d -termien muutokset voidaan tietyssä mielessä tulkita mallin parametrimuutoksiksi.

2.2. ETLAn mallin redusoidusta muodosta

Mallin yleisen version rakennemuoto voidaan kirjoittaa

$$(8) \quad H_t(y_t, z_t, d_t) = 0, \text{ missä}$$

y_t , z_t ja d_t ovat kuten edellä ja H_t on mallin rakennemuodon funktioesitys jaksolla t . Rakennemuotoa (8) vastaava redusoitu muoto on

$$(9) \quad y_t = G_t(z_t, d_t), \text{ missä}$$

$$G_t : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}^n, \text{ kun}$$

$$p = c(R)^1).$$

Mallin linearisoitua versiota (1) vastaava redusoitu muoto on

$$(10) \quad G_t(z_t, d_t) = \Gamma_t^{-1} B_t z_t + \Gamma_t^{-1} d_t.$$

Matriisia $C_t = \Gamma_t^{-1}$ kutsutaan mallin inverssiksi ja matriisia $\Pi_t = \Gamma_t^{-1} B_t$ redusoidun muodon kerroinmatriisiksi. Näitä merkintöjä käyttäen redusoitu muoto voidaan esittää

$$(11) \quad y_t = \Pi_t z_t + C_t d_t.$$

1) Merkintä $c(R)$ tarkoittaa joukon R elementtien lukumäärää eli tässä käyttäytymisyhtälöiden lukumäärää.

Redusoitu muoto (11) on tietyissä tilanteissa käyttökelpoinen mallin linearisoidun version ratkaisukaavana: kun muuttujia z_t ja d_t varioidaan, mutta kertoimet C_t ja Π_t ovat kiinteitä, kuten yhden jakson simulointikokeissa, voidaan y_t ratkaista kaavan (11) avulla.

Tilanteissa, joissa C_t ja Π_t muuttuvat, kuten useamman jakson simuloinneissa, on aiheellista erottaa toisistaan kaksi asiaa: toisaalta ratkaisun y_t laskeminen ja toisaalta kerroinmatriisien C_t ja Π_t määrääminen. Viivallisen yhtälösystemin ratkaisua ja inverssin määräämistä pidetään yleensäkin eri tehtävinä numeerisessa analyysissä.

Kirjoituksissa Vajanne ja Vartia (1978) sekä Vajanne, Pylkänen ja Salmi (1980) on esitetty iterointiin perustuvia vaihtoehtoja ratkaisun y_t laskemiseksi. Iteratiiviset ratkaisumenetelmät soveltuvat myös mallin epälineaarisen version ratkaisemiseen, mikä tietysti pelkällä inverssillä kertomisella ei onnistuisikaan. Mainituissa viitteissä on tarkasteltu myös ns. ketjuennusteiden laskemista, johon tässä yhteydessä ei puututa.

Paitsi mallin ratkaisemisen kannalta redusoituun muotoon liittyvät matriisit C_t ja Π_t ovat muutenkin kiinnostavia. Inverssin C_t elementeille pätee (alaindeksi t poistettu)

$$(12) \quad \frac{\partial y_i}{\partial d_j} = c_{ij}, \quad i, j \in N; \quad \text{tässä erityisesti } j \in R,$$

ja matriisin Π_t elementeille

$$(13) \quad \frac{\partial y_i}{\partial z_k} = \pi_{ik}, \quad i \in N, \quad k \in M.$$

Osittaisderivaattojen (12) ja (13) arvot eivät riipu siitä, missä (z, d) -pisteissä ne lasketaan.

Kaavan (12) mukaisesti inverssi C_t osoittaa, mihin suuntaan ja miten voimakkaasti mallin virhetermien muutokset poikkeuttavat mallin ratkaisua alkuperäisestä ratkaisusta. Mallin inverssi tarjoaa siis eräänlaisen herkkyysmittarin mallin avulla laskettuja ennusteita käyttävälle: inverssi kertoo, miten herkkä malli on sen käyttäytymisyhtälöihin tulevien autonomisten shokkien suhteen.

Kaava (13) osoittaa puolestaan, että eksogeenisten muuttujien muutosten vaikutukset endogeenisiin muuttujiin välittyvät matriisin Π_t kautta. Matriisin Π_t avulla voidaan saada käsitys siitä, miten jonkin eksogeenisen tekijän poikkeaminen alkuperäisestä arvostaan siirtää mallin ratkaisua alkuperäisestä ratkaisusta. Siten myös redusoidun muodon kerrointen sisältämä informaatio on arvokasta mallin käytön ja malliennusteen herkkyyden arvioinnin kannalta.

Matriisin Π_t elementit ovat itse asiassa ensimmäisen jakson dynaamisia multiplikaattoreita. Niitä voi käyttää apuna arvioitaessa esimerkiksi erilaisten eksogeenisten talouspolitiikkashokkien välittömiä vaikutuksia mallin endogeenisissä muuttujissa. Tässä kirjoituksessa käytettävä notaatio, jossa mallin viipeitä ei ole eksplisiittisesti kirjoitettu näkyviin, ei salli kaavan (13) yleistyksiä dynaamisten multi-

plikaattorien $\partial y_{ij,t+h} / \partial z_{kt}$, $h \geq 1$, esittämiseksi. ETLAn mallin linearisoidulla vakiokertoimisella versiolla laskettuja yksikköimpulssivasteita on erikseen esitelty muualla (Pylkkänen, 1980).

Tietyissä tilanteissa on mielenkiintoista tarkastella esitysten (12) ja (13) ohella myös eräitä muita eri muutosten välisiä riippuvuuksia, kuten (alaindeksi t poistettu)

$$\frac{\partial y_i}{\partial \gamma_{rs}}, \frac{\partial c_{ij}}{\partial \gamma_{rs}} \text{ ja } \frac{\partial \pi_{ik}}{\partial \gamma_{rs}},$$

missä a_{rs} on rakennemuodon endogeenisen kerroinmatriisin parametri. Nämä osittaisderivaattalausekkeet ovat varsin yksinkertaiset ja helposti johdettavissa¹⁾:

$$(14) \quad \frac{\partial y_i}{\partial \gamma_{rs}} = -c_{ir} y_s, \quad i \in N$$

$$(15) \quad \frac{\partial c_{ij}}{\partial \gamma_{rs}} = -c_{ir} c_{sj}, \quad i, j \in N$$

ja

$$(16) \quad \frac{\partial \pi_{ik}}{\partial \gamma_{rs}} = -c_{ir} \pi_{sk}, \quad i \in N, \quad k \in M.$$

1) Kaavat (14) ja (15) on johdettu esim. teoksessa Faddejew ja Faddejewa (1964).

Kirjoitetaan jatkoa silmälläpitäen rakennemuotoa (2) vastaavasti redusoitu muoto komponenttimuodossa

$$(17) \quad y_i = \sum_{k \in M} \pi_{ik} z_k + \sum_{j \in N} c_{ij} d_j, \quad i \in N.$$

Koska muiden kuin käyttäytymisyhtälöiden virhetermit d_i ovat identtisesti nolliä, voidaan redusoitu muoto kirjoittaa hie-
man "lyhyemmin":

$$(18) \quad y_i = \sum_{k \in M} \pi_{ik} z_k + \sum_{j \in R} c_{ij} d_j, \quad i \in N.$$

Esityksestä (18) näkyy hyvin, että koska virhetermishokkeja voidaan mielekkäästi antaa vain mallin käyttäytymisyhtälöille, inverssin ne sarakkeet, jotka vastaavat mallin käyttäytymisyhtälöitä, ovat tarkastelussa erityisen mielenkiinnon kohteena.

2.3. Mallin parametrimuutoksista

Kun jatkossa puhutaan mallin parametrimuutoksesta, tarkoitetaan sillä elementin arvon muuttumista yhtälösystemin (1) yhteydessä määritellyissä matriiseissa Γ_t , B_t tai vektorissa d_t . Kiinnostavia muutoksia ovat ilman muuta muutokset matriisin Γ_t elementeissä, koska niiden seurauksena mallin inverssi C_t muuttuu. Matriisin B_t elementtien muutokset ovat endogeenisen kerroinmatriisin elementtien muutoksiin verrattuna melko triviaaleja tapauksia, mutta myöhemmin osittain redu-

soitujen muotojen yhteydessä tarkasteltuna ne osoittautuvat erittäin mielenkiintoisiksi ilmiöiksi. Vektorin d_t elementtien muutokset, jotka siis myös luetaan parametrimuutoksiksi, ovat näennäisesti kaikkein yksinkertaisimpia parametrimuutoksia, mutta niillekin on löydettävissä kiinnostavia tulkintoja.

ETLAn mallin parametrimuutoksissa voidaan erottaa erityyppisiä tapauksia:

1. Painokertoimien muutokset

Mallin ns. painoidentiteeteissä esiintyy ajanjaksosta toiseen muuttuvia painokertoimia, ks. esim. kaavaa (5). Esimerkissä kokonaiskulutuksen muutos on yksityisen ja julkisen kulutuksen muutosten painotettu summa, jossa painoina ovat edellisen jakson arvo-osuudet. Tasosuhteiden tyyppiset painokertoimet muuttuvat vuodesta toiseen, joskin käytännössä hyvin rauhallisesti. Painokertoimien muutosten vaikutuksia ei tässä kirjoituksessa tarkastella lainkaan.

2. Eksogeenisten muuttujien kerrointen (β_{ik}) muutokset

(pl. painokerrointen muutokset)

Painokertoimien ohella matriisin B_t muuttuvia elementtejä voivat olla käyttäytymisyhtälöiden selittävien eksogeenisten muuttujien kerroinestimaatit. Myöskin ennustetilanteessa suoritettavat mallin käyttäytymisyhtälöiden ns. tasosiirrot voitaisiin tulkita puheena olevaan parametrimuutosryhmään kuuluviksi (vrt. s. 9). On kuitenkin luontevampaa tarkastella niitä erikseen d_i -termimuutoksina.

3. Virhetermien (d_i) muutokset

Käytännössä varsin tärkeän erikoistapauksen parametrimuutosten joukossa muodostavat mallin virhetermien d_i muutokset. Additiivisten korjaustermien (käyttäytymisyhtälöiden "tasosiirtojen") käytön oikeutusta ja niiden tulkintoja on pohdittu esim. kirjoituksessa Vartia (1975).

4. Endogeenisten muuttujien kerrointen (γ_{ij}) muutokset

(pl. painokerrointen muutokset)

Painokertoimien ohella matriisin F_t muuttuvia elementtejä voivat olla käyttäytymisyhtälöiden selittävien endogeenisten muuttujien kerroinestimaatit. Matriisissa F_t tapahtuvat muutokset merkitsevät mallin simultaanirakenteen muuttumista; erityisen kiinnostavia simultaanirakenteen muutoksia ovat ne, jolloin kahden endogeenisen muuttujan välinen suora kytkentä katkaistaan tai kun kahden aikaisemmin vailla välitöntä kytkentää olleen endogeenisen muuttujan välille tällainen riippuvuus lisätään.

Tämä voidaan ilmaista formaalisemmin määrittelemällä mallin rakennemuodon *kytkentämatriisi*

$$(19) \quad R^{\square} = (P \ Q) \\ = (B(\Gamma) \ B(B)) .$$

Operaatio B muuntaa reaaliarvoisen argumenttimatriisin Boolean matriisiksi, so. matriisin nollasta poikkeavat elementit ykkösiksi ja nollat nolliksi.

Kerrointen γ_{ij} muutoksissa voidaan kytkentämatriisiesitykseen liittyen erottaa kaksi päätapausta

- (i) endogeenisen selittäjän kerrointa γ_{ij} ($i \neq j$) muutetaan, mutta matriisi $P = B(\Gamma)$ säilyy ennallaan. Tällainen tilanne saattaa tulla esiin mallin herkkyysanalyysin yhteydessä tai estimoitaessa uudestaan mallin parametreja.
- (ii) kerrointa γ_{ij} muutetaan esim. yhtälön uudelleen-spesifioinnin ja -estimoinnin yhteydessä siten, että myös matriisi P muuttuu. Tällöin siis elementti p_{ij} muuttuu joko ykkösestä nollaksi (vanha kytkentä puretaan) tai nollostaa ykköseksi (spesifioidaan uusi kytkentä).

Kategoriaan (ii) kuuluvia muutoksia voitaneen pitää mielenkiintoisimpina mallin kaikista parametrimuutoksista. Tähän luokkaan kuuluvat myös mallin käyttäytymisyhtälön ns. eksogenisoiminen ja sille vastakkainen operaatio eli eksogeenisen muuttujan ns. endogenisoiminen (ks. tarkemmin luku 5).

3. MALLIN RAKENNEMUODON YHDEN PARAMETRIMUUTOKSEN VAIKUTUKSET

Seuraavassa tarkastellaan mallin rakennemuodon yhtälön yhden parametrimuutoksen vaikutusta mallin redusoituun muotoon. Tarkasteltavan parametrin oletetaan aluksi olevan jonkin käyttäytymisyhtälön johonkin endogeeniseen muuttujaan liittyvä kerroin γ_{rs} , $r \in R$ ja $s \in N$. Tarkastelun tuloksena saadaan esitys, jossa uusi redusoitu muoto $(C^* \Pi^*)$ on vanhan redusoidun muodon $(C \Pi)$ ja muutoksen ϵ_{rs} funktio. Lisäksi tarkastellaan vastaavuutta mallin kerroinparametrimuutosten ja virhetermimuutosten välillä, parametrimuutoksen vaikutusta mallin ratkaisuun sekä eräitä mielenkiintoisia redusoidun muodon kerrointen suhteellisia muutoksia. Luvun lopuksi tarkastellaan mallin eksogeenisen kerroinmatriisin B elementin muutoksen vaikutuksia sekä havainnollistetaan esitettyjä tuloksia esimerkkien avulla.

3.1. Parametrimuutoksen vaikutus redusoidun muodon kerrotoimiin

Suoritetaan aluksi ositus reaktioyhtälöön $\{r\}$ ja muihin yhtälöihin $N - \{r\}$, jolloin rakennemuoto voidaan kirjoittaa

$$(20) \quad \sum_{j \in N} \gamma_{ij} y_j = \sum_{k \in M} \beta_{ik} z_k + d_i, \quad i \in N - \{r\}$$

ja

$$(21) \quad \sum_{j \in N} \gamma_{rj} y_j = \sum_{k \in M} \beta_{rk} z_k + d_r$$

Kun parametria γ_{rs} muutetaan, säilyvät muuttujien y_i , $i \in N - \{r\}$, yhtälöt ennallaan, mutta muuttujan y_r yhtälöksi tulee

$$(22) \quad \sum_{j \in N - \{s\}} \gamma_{rj} y_j + (\gamma_{rs} + \varepsilon_{rs}) y_s = \sum_{k \in M} \beta_{rk} z_k + d_r.$$

Tämä voidaan kirjoittaa

$$(23) \quad \sum_{j \in N} \gamma_{rj} y_j = \sum_{k \in M} \beta_{rk} z_k + d'_r,$$

missä

$$(24) \quad d'_r = d_r - \varepsilon_{rs} y_s.$$

Yhtälö (24) on sama kuin (21) lukuun ottamatta yhtälön oikealle puolelle lisättyä virhetermiä $-\varepsilon_{rs} y_s$. Uutta yhtälösystemiä (20) ja (23) vastaava redusoitu muoto on

$$(25) \quad y_i = \sum_{k \in M} \pi_{ik} z_k + \sum_{j \in N - \{r\}} c_{ij} d_j + c_{ir} d'_r, \quad i \in N.$$

Johdetaan tästä korjattu redusoitu muoto $(C^* \Pi^*)$ sijoittamalla yhtälöihin (25) lauseke (24). Osittamalla näin saattava yhtälösystemi yhtälöön $\{s\}$ ja yhtälöihin $i \in N - \{s\}$ ja redusoimalla se muuttujan y_s osalta saadaan

$$(26) \quad \begin{cases} y_i = \sum_{k \in M} \pi_{ik}^* z_k + \sum_{j \in N} c_{ij}^* d_j, & i \in N - \{s\} \\ y_s = \sum_{k \in M} \pi_{sk}^* z_k + \sum_{j \in N} c_{sj}^* d_j, \end{cases}$$

missä

$$(27) \quad \begin{cases} c_{ij}^* = c_{ij} - \frac{c_{ir} c_{sj}}{\frac{1}{\epsilon_{rs}} + c_{sr}}, & i \in N - \{s\} \\ \pi_{ik}^* = \pi_{ik} - \frac{c_{ir} \pi_{sk}}{\frac{1}{\epsilon_{rs}} + c_{sr}}, & i \in N - \{s\} \\ c_{sj}^* = \frac{c_{sj}}{1 + c_{sr} \epsilon_{rs}} = c_{sj} - \frac{c_{sr} c_{sj}}{\frac{1}{\epsilon_{rs}} + c_{sr}} \\ \pi_{sk}^* = \frac{\pi_{sk}}{1 + c_{sr} \epsilon_{rs}} = \pi_{sk} - \frac{c_{sr} \pi_{sk}}{\frac{1}{\epsilon_{rs}} + c_{sr}}, \end{cases}$$

edellyttäen, että $1 + c_{sr} \epsilon_{rs} \neq 0$. Tämä vaatimus on aina täytetty, jos $c_{sr} = 0$, muussa tapauksessa on vaadittava, että muutos $\epsilon_{rs} \neq -\frac{1}{c_{sr}}$. Inverssin yksikäsitteisyyden perusteella kaavan (27) määrittelemät matriisit ovat juuri esitetyt C^* - ja Π^* -matriisit.

Uuden redusoidun muodon kertoimet c_{ij}^* ja π_{ik}^* voidaan siis esittää seuraavasti:

$$(28) \quad \left\{ \begin{array}{l} c_{ij}^* = c_{ij} - \frac{c_{ir} c_{sj}}{\frac{1}{\epsilon_{rs}} + c_{sr}}, \quad i, j \in N, \\ \pi_{ik}^* = \pi_{ik} - \frac{c_{ir} \pi_{sk}}{\frac{1}{\epsilon_{rs}} + c_{sr}}, \quad i \in N, k \in M. \end{array} \right.$$

Termejä c_{ij}^* koskeva tulos tunnetaan Shermanin ja Morrisonin (1953) kaavana.

Saatu lauseke (28) on mielenkiintoinen, koska siinä on esitetty c_{ij}^* -kerrointen yhteys kertoimiin c_{ij} ja muutokseen ϵ_{rs} sekä π_{ik}^* -kerrointen yhteys kertoimiin π_{ik} ja c_{ij} ja muutokseen ϵ_{rs} .

Esityksestä näkyy hyvin tehtävän laskennallinen helppous, sillä esimerkiksi c_{ij}^* -kerrointen osalta riittää C-matriisin elementtien selaaminen läpi ja kunkin elementin yhteydessä kolmen aritmeettisen operaation suorittaminen. Jos verrataan algoritmin (28) laskennallista raskautta esim. matriisin invertointiin

$$C^* = (\Gamma^*)^{-1},$$

missä Γ^* on ϵ_{rs} :llä korjattu rakennemuodon kerroinmatriisi, voidaan todeta, että uuteen invertointiin liittyyi n-kertainen matriisiselailu ja kunkin elementin kohdalla kolme aritmeettistä operaatiota. Toisin sanoen algoritmin (28) vaatimien aritmeettisten operaatioiden lukumäärän suhde

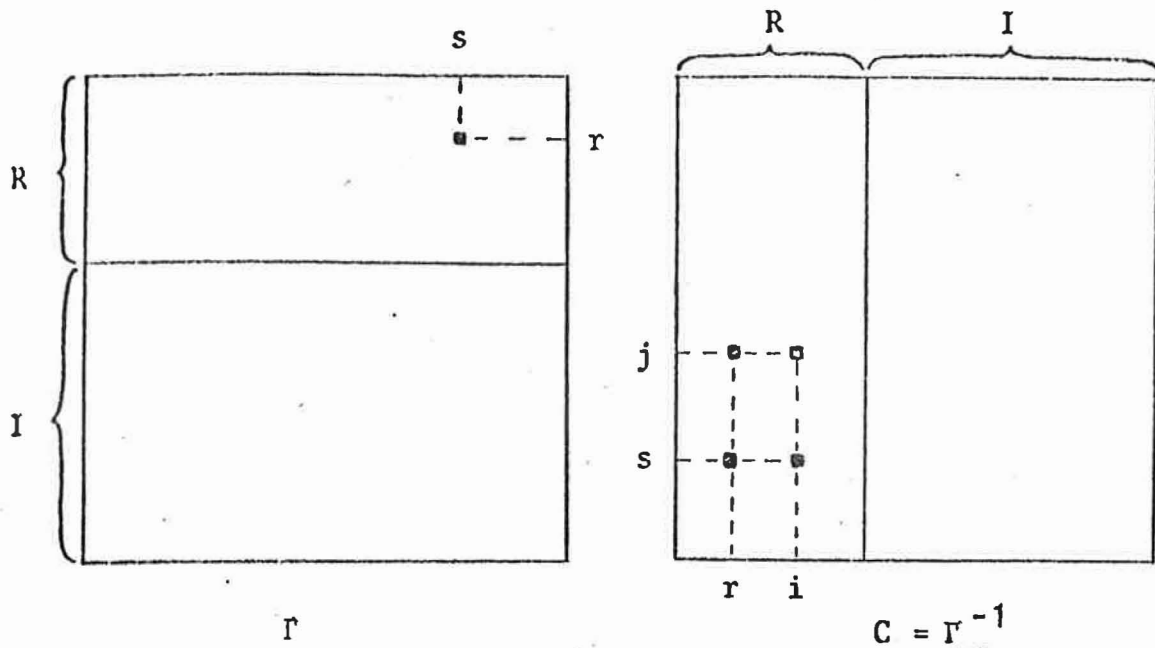
inverssi on
määrä on

Kiinnitys ja
toimien ja
dentu...
miel...
joilla...
sarakke...
tetyss...
sen...

On tärkeä...
element...
vien sarak...
sen...
arvoja...
matriis...
taan vain...
C, j...
sen II-mat...

kaav...
kaav...
telman...

Kaavio 1. Shermanin ja Morrisonin kaavan havainnollistus



Johdetaan vielä lyhyesti esitys (28) käyttäen matriisinotaa-
tiota. Redusoitu muoto on

$$(29) \quad y = \Pi z + Cd',$$

missä nyt

$$(30) \quad d' = d - \epsilon_{rs} E_{rs} y,$$

kun ϵ_{rs} on elementin γ_{rs} muutos ja matriisi $E_{rs} = (e_{ij})$,
 $e_{ij} = \phi(i=r) \cdot \phi(j=s)$, $i, j \in N^1$.

1) $\phi(q)$ tarkoittaa väitteen q totuusfunktiota.

Sijoittamalla lauseke (30) yhtälösystemiin (29) saadaan

$$(31) \quad (I + \epsilon_{rs} CE_{rs})y = \Pi z + Cd,$$

josta edelleen

$$(32) \quad y = \Pi^* z + C^* d,$$

missä

$$(33) \quad \begin{cases} C^* = (I + \epsilon_{rs} CE_{rs})^{-1} C \\ \Pi^* = (I + \epsilon_{rs} CE_{rs})^{-1} \Pi. \end{cases}$$

Kaavan (33) invertoitava matriisi osoittautuu alkeismatriisiksi, jolla tunnetusti on varsin yksinkertainen inverssi, ks. esim. Householder (1964). Voidaankin kirjoittaa

$$(34) \quad \begin{cases} C^* = (I - \tau CE_{rs}) C \\ \Pi^* = (I - \tau CE_{rs}) \Pi, \end{cases}$$

missä skalaari τ on

$$(35) \quad \tau = (1/\epsilon_{rs} + c_{sr})^{-1},$$

edellyttäen, että $(1/\epsilon_{rs} + c_{sr}) \neq 0$. Esitys (34)-(35) on sisällöltään täsmälleen sama kuin (28).

3.2. Vastaavuus kerroinparametri- ja virhetermimuutosten välillä

Tarkastellaan seuraavaa kysymyksenasettelua: olkoon lähtökohtana malli (1), ja kutsutaan sitä vastaavaa malliratkaisua \hat{y} mallin perusratkaisuksi,

$$(36) \quad \hat{y} = Cd + \Pi z$$

Muutetaan nyt mallia lisäämällä rakennemuodon kertoimeen γ_{rs} muutos ϵ_{rs} . Muutoksen jälkeistä malliratkaisua merkitäkään symbolilla $\hat{y}^{(\epsilon)}$,

$$(37) \quad \hat{y}^{(\epsilon)} = C^*d + \Pi^*z,$$

jossa C^* ja Π^* ovat kuten kaavoissa (34)-(35) on määritelty.

Nyt kysytään, voidaanko ratkaisu $\hat{y}^{(\epsilon)}$ saavuttaa korjaamalla γ_{rs} -elementin sijasta mallin jäännöstermivektoria d . Merkitään korjattua virhetermivektoria symbolilla d' ja korjausvektoria symbolilla δ , siten että

$$(38) \quad d' = d + \delta.$$

Tehtävänä on nyt valita korjausvektori δ siten, että mallin

$$(39) \quad Fy = Bz + d'$$

ratkaisu $\hat{y}^{(\delta)}$ on sama kuin mallin

$$(40) \quad \Gamma^* y = Bz + d$$

ratkaisu $\hat{y}^{(\epsilon)}$, kun siis Γ^* on ϵ_{rs} :llä korjattu rakennemuodon kerroinmatriisi.

Helposti nähdään, että kerroinparametrimuutosta vastaava virhetermimuutos määräytyy täysin yksikäsitteisesti:

$$(41) \quad \begin{aligned} \hat{y}^{(\epsilon)} &= C*d + \Pi*z = (I - \tau CE_{rs})(Cd + \Pi z) \\ &= (I - \tau CE_{rs})\hat{y} = \hat{y} - \tau CE_{rs}\hat{y} \end{aligned}$$

ja

$$(42) \quad \hat{y}^{(\delta)} = Cd' \quad \Pi z = Cd + \Pi z + C\delta = \hat{y} + C\delta.$$

Asettamalla poikkeamat perusratkaisusta \hat{y} yhtä suuriksi saadaan

$$(43) \quad C\delta = -\tau CE_{rs}\hat{y},$$

josta edelleen

$$(44) \quad \delta = -\tau E_{rs}\hat{y}.$$

Tämä on komponenttimuodossa esitettynä

$$(45) \quad \begin{cases} \delta_r = -\tau \hat{y}_s \\ \delta_i = 0, \quad i \neq r, \end{cases}$$

jossa \hat{y}_s on muuttujan y_s perusratkaisu ja τ kuten kaavassa (35).

Parametrimuutosta ϵ_{rs} vastaava ratkaisun muutos voidaan siis saada aikaan saman yhtälön virhetermikorjauksella δ_r . Korjaustermin δ_r arvo riippuu vain perusratkaisun komponentista \hat{y}_s , inverssielementistä c_{sr} sekä parametrimuutoksesta ϵ_{rs} .

Inverssin elementtiä c_{sr} voi pitää indikaattorina, joka kuvaa muuttujan y_r (tai yhtälön r) takaisinkytkennän voimakkuutta muuttujaan y_s (tai yhtälöön s) puheena olevassa simulaanimallissa. Jos takaisinkytkentää ei ole eli $c_{sr} = 0$, niin

$$(46) \quad \delta_r = -\epsilon_{rs} \hat{y}_s.$$

Jos takaisinkytkentä on heikko eli $c_{sr} \approx 0$, niin (46) on hyvä approksimaatio relaatiolle (45).

3.3. Parametrimuutoksen vaikutus mallin ratkaisuun

Edellisessä kappaleessa tarkasteltiin, miten tiettyä kerroinparametrimuutosta vastaava muutos mallin perusratkaisuun nähdessä voidaan saada aikaan myös valitsemalla sopiva virhetermi-muutos. Samassa yhteydessä itse asiassa jo johdettiin parametrimuutoksen vaikutus mallin ratkaisuun. Yhtälö (41) kirjoitettuna komponenttimuotoon on

$$\begin{aligned}
 (47) \quad \hat{y}_i^{(\epsilon)} &= \hat{y}_i - \tau c_{ir} \hat{y}_s \\
 &= \hat{y}_i - \frac{c_{ir} \hat{y}_s}{\frac{1}{\epsilon_{rs}} + c_{sr}}, \quad i \in N,
 \end{aligned}$$

jossa \hat{y}_s siis on muuttujan y_s perusratkaisu. Lauseke (47) on muodoltaan lähellä yhtälöä (28). Jälleen tullaan toimeen hyvin pienellä informaatiolla: muuttujan y_i uuden ratkaisun laskemiseksi tarvitaan tiedot vain muuttujien y_i ja y_s perusratkaisuista, parametrimuutoksen suuruudesta sekä inverssi-elementeistä c_{sr} ja c_{ir} .

Esityksestä (47) nähdään, että muuttujan y_i ratkaisu muuttuu ϵ_{rs} :n kasvaessa monotonisesti τ -funktion määräämällä tavalla. Erityisesti $\hat{y}^{(\epsilon)}$ -vektorin komponentti $\hat{y}_s^{(\epsilon)}$ lähenee nollaa ϵ_{rs} :n rajatta kasvaessa, jos $c_{sr} \neq 0$.

Mikäli yhtälön $r \in R$ takaisinkytkentä yhtälöön $s \in N$ on hyvin heikko eli $c_{sr} \approx 0$, voidaan ϵ_{rs} :ää käyttää hyvänä approksimaationa τ :lle. Tällöin saadaan

$$(48) \quad \frac{\Delta \hat{y}_i}{\Delta \gamma_{rs}} \approx -c_{ir} \hat{y}_s = \left. \frac{\partial y_i}{\partial \gamma_{rs}} \right|_{y_s = \hat{y}_s},$$

vrt. kaava (14).

Jatkoa ajatellen on hyödyllistä kerätä kaavojen (28) ja (47) sisältö yhteen määrittelemällä erityinen operaatio $R_{rs}^{(\epsilon)}$.

Määritelmä 1: Merkitään rakennemuodon kertoimen γ_{rs} lisäyksen ϵ_{rs} aiheuttamaa siirtymistä matriisista $(C \Pi \hat{y})$ matriisiin $(C^* \Pi^* y^*)$ seuraavasti:

$$(49) \quad (C^* \Pi^* y^*) = R_{rs}^{(\epsilon)} (C \Pi \hat{y}).$$

Operaation $R_{rs}^{(\epsilon)}$ määrittelee kaava

$$(50) \quad \begin{cases} c_{ij}^* = c_{ij} - \tau c_{ir} c_{sj}, & i, j \in N \\ \pi_{ik}^* = \pi_{ik} - \tau c_{ir} \pi_{sk}, & i \in N, k \in M \\ y_i^* = \hat{y}_i - \tau c_{ir} \hat{y}_s, & i \in N, \end{cases}$$

$$\text{missä } \tau = \left(\frac{1}{\epsilon_{rs}} + c_{sr} \right)^{-1}.$$

R -operaatiolla on kommutointiominaisuus

$$(i) \quad R_{r_1 s_1}^{(\epsilon_1)} R_{r_2 s_2}^{(\epsilon_2)} = R_{r_2 s_2}^{(\epsilon_2)} R_{r_1 s_1}^{(\epsilon_1)}.$$

Lisäksi operaatiolla on additiivisuusominaisuus siinä mielessä, että

$$(ii) \quad R_{rs}^{(\epsilon_1)} R_{rs}^{(\epsilon_2)} = R_{rs}^{(\epsilon_2)} R_{rs}^{(\epsilon_1)} = R_{rs}^{(\epsilon_1 + \epsilon_2)}.$$

Erikoistapauksena tästä voidaan kirjoittaa

$$(iii) \quad R_{rs}^{(\epsilon)} R_{rs}^{(-\epsilon)} = R_{rs}^{(0)} = I,$$

jossa I tarkoittaa identiteettioperaatiota.

3.4. Redusoidun muodon kertoimien suhteellisista muutoksista

Tarkastellaan aluksi hieman lähemmin edellä esiteltyä τ -funktioita. Parametrimuutoksen ϵ_{rs} aikaansaamat muutokset redusoidun muodon kertoimissa olivat

$$\begin{cases} \Delta c_{ij} = c_{ij}^* - c_{ij} = -c_{ir} c_{sj} \tau, i, j \in N \\ \Delta \pi_{ik} = \pi_{ik}^* - \pi_{ik} = -c_{ir} \pi_{sk} \tau, i \in N, j \in M, \end{cases}$$

kun

$$\tau = \left(\frac{1}{\epsilon_{rs}} + c_{sr} \right)^{-1},$$

ks. kaava (28).

Mikäli yhtälön $r \in R$ takaisinkytkentä yhtälöön $s \in N$ puuttuu ($c_{sr} = 0$) tai on heikko ($c_{sr} \approx 0$), ovat muutokset Δc_{ij} ja $\Delta \pi_{ik}$ esitettävissä tai vastaavasti approksimoitavissa muutoksen ϵ_{rs} suhteen lineaarisilla lausekkeilla

$$\begin{cases} \Delta c_{ij} = -c_{ir} c_{sj} \epsilon_{rs}, i, j \in N \\ \Delta \pi_{ik} = -c_{ir} \pi_{sk} \epsilon_{rs}, i \in N, j \in M. \end{cases}$$

Oletetaan kuitenkin aluksi, että "takaisinkytkentäparametri" $c_{sr} \neq 0$. Tällöin τ :n yhtälö voidaan kirjoittaa muotoon¹⁾

$$(51) \quad \left(\tau - \frac{1}{c_{sr}}\right) \left(\varepsilon + \frac{1}{c_{sr}}\right) = -\frac{1}{c_{sr}^2}.$$

Esityksestä (51) nähdään suoraan, että kyseessä on hyperbeli, jonka asymptootteina ovat suorat

$$\tau = \frac{1}{c_{sr}} \quad \text{ja} \quad \varepsilon = -\frac{1}{c_{sr}}.$$

Käyrän kaarevuutta kuvaavan parametrin arvo on $-c_{sr}^{-2}$. Funktio $\tau(\varepsilon)$ on konkaavi alueella $\varepsilon > -1/c_{sr}$ ja konvekksi alueella $\varepsilon < -1/c_{sr}$.

Merkitään τ -funktiota seuraavasti: $\tau = \tau(\varepsilon; c_{sr})$.

Tarkastellaan funktion kuvaajaa parametrin c_{sr} positiivisilla arvoilla 0.1, 0.5 ja 1.5. Nämä arvot ovat suuruusluokiltaan järkeviä ETLAn mallin tapauksessa.

Kuviossa 1 on esitetty kolme kuvaajaa, jotka vastaavat funktioita

1) Muutoksen ε_{rs} alaindeksit r, s on jätetty pois merkintöjen lyhentämiseksi.

$$(1) = \tau(\epsilon; 0.1),$$

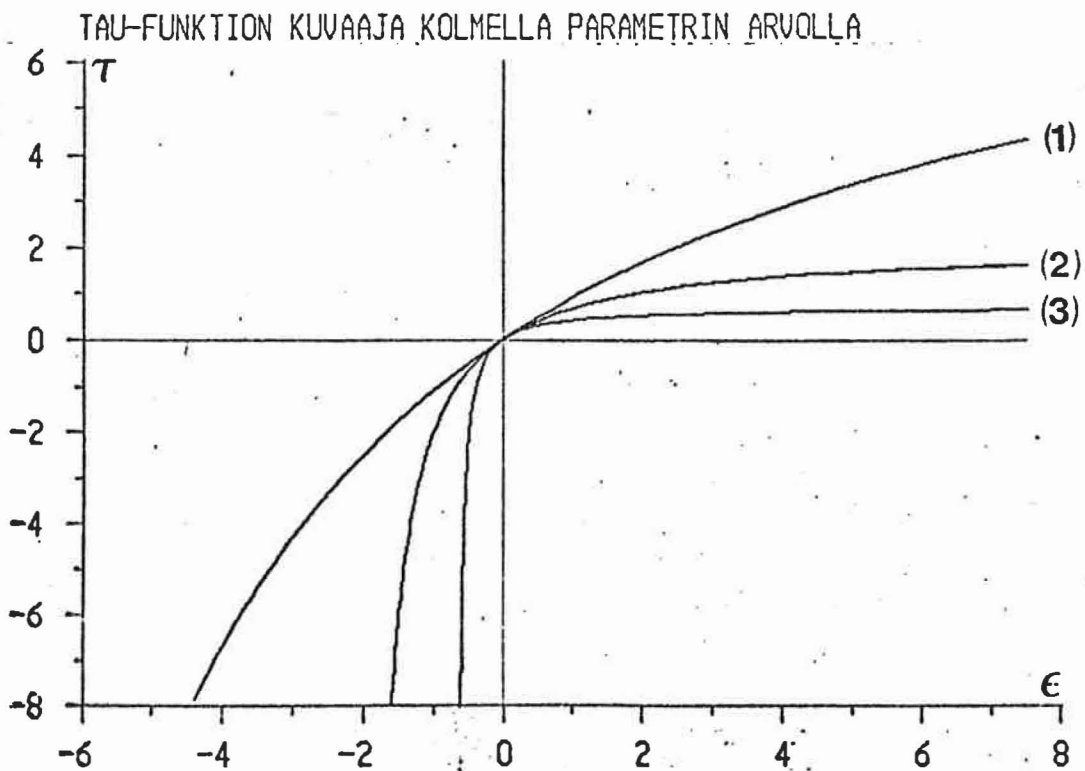
$$(2) = \tau(\epsilon; 0.5)$$

ja $(3) = \tau(\epsilon; 1.5).$

Muutos ϵ varioi välillä $(-\frac{1}{c_{sr}}, \infty)$; tarkastelun yksinkertaistamiseksi tässä ei tarkastella vaihteluväliä $\epsilon \in (-\infty, -\frac{1}{c_{sr}})$.

Kuvio 1. Kolme τ -funktion kuvaajaa (1) = $\tau(\epsilon; 0.1)$
 (2) = $\tau(\epsilon; 0.5)$
 (3) = $\tau(\epsilon; 1.5)$

(vain hyperbelien oikeanpuoliset haarat on piirretty näkyviin)



Funktiolla τ on epäjatkuvuuskohta pisteessä $\epsilon = -1/c_{sr}$. Tämä liittyy siihen neliömatriisin ominaisuuteen, että mikä tahansa säännöllinen matriisi Γ saadaan singulaariseksi yhtä elementtiä γ_{rs} muuttamalla, edellyttäen että alkuperäisen Γ -matriisin inverssin C elementti c_{sr} on nolosta poikkeava. Singulaarisuuteen päädytään juuri valitsemalla uudeksi (r,s) -elementiksi $\gamma_{rs}^* = \gamma_{rs} - 1/c_{sr}$.

Kuvioon 1 on piirretty vain hyperbelien oikeanpuoleiset haarat ($\epsilon > -1/c_{sr}$). Napojen toisella puolella ($\epsilon < -1/c_{sr}$) sijaitsevat vasemmanpuoleiset haarat on jätetty piirtämättä, jotta kuviosta ei tulisi liian sekavaa.

Kuviosta 1 nähdään hyvin, kuinka τ ja siten myös Δc_{ij} ja $\Delta \pi_{ik}$ muuttuvat dramaattisesti lähestyttäessä napaa $\epsilon = -1/c_{sr}$. Samoin nähdään, että mitä suurempi parametri c_{sr} on, sitä jyrkemmin käyrä kääntyy origon ympärissä. Käyrät kulkevat origon kautta eli "muutos" $\epsilon = 0$ ei tietenkään muuta mallin kertoimia.

Jos kerroin c_{sr} on negatiivinen, edellinen tarkastelu muuttuu origon suhteen peilikuvakseen.

Jos "takaisinkytkentäparametri" $c_{sr} = 0$, funktio τ on argumenttinsa ϵ_{rs} lineaarinen funktio, vailla mitään epäjatkuvuuskohtia. Pienillä parametrin c_{sr} arvoilla ($c_{sr} \approx 0$) voidaan kirjoittaa

$$\frac{\Delta c_{ij}}{\Delta \gamma_{rs}} \approx -c_{ir} c_{sj} = \frac{\partial c_{ij}}{\partial \gamma_{rs}}$$

ja

$$\frac{\Delta \pi_{ik}}{\Delta \gamma_{rs}} \approx -c_{ir} \pi_{sk} = \frac{\partial \pi_{ik}}{\partial \gamma_{rs}}$$

Osittaisderivaattalausekkeet $\frac{\partial c_{ij}}{\partial \gamma_{rs}}$ ja $\frac{\partial \pi_{ik}}{\partial \gamma_{rs}}$ ovat siis vastaavien erotusosamäärien käyttökelpoisia approksimaatioita. Lineaarinen approksimaatio huononee nopeasti $|c_{sr}|$:n kasvaessa.

Tarkastellaan seuraavaksi differenssien Δc_{ij} ja $\Delta \pi_{ik}$ asemasta eräitä suhteellisia muutoksia. Jatkossa oletetaan koko ajan, että $c_{sr} > 0$ ja että $\epsilon_{rs} > -\frac{1}{c_{sr}}$. Tarkastelut on helpo modifioida kattamaan muutkin tapaukset.

Kaavan (28) pohjalta voidaan kirjoittaa

$$(52) \quad \left\{ \begin{array}{l} \Delta c_{sr} = -c_{sr}^2 \tau \\ \Delta c_{ir} = -c_{ir} c_{sr} \tau, \quad i \neq s \\ \Delta c_{sj} = -c_{sr} c_{sj} \tau, \quad j \neq r \\ \Delta c_{ij} = -c_{ir} c_{sj} \tau, \quad i \neq s, \quad j \neq r. \end{array} \right.$$

Nimeämällä funktio $c_{sr} \tau$ funktioksi τ_1 voidaan edelleen kirjoittaa

$$(53) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{\Delta c_{sr}}{c_{sr}} = -\tau_1 \quad \text{eli} \quad \frac{c_{sr}^*}{c_{sr}} = 1 - \tau_1 \\ \frac{\Delta c_{ir}}{c_{ir}} = -\tau_1 \quad \text{eli} \quad \frac{c_{ir}^*}{c_{ir}} = 1 - \tau_1, \quad i \neq s \\ \frac{\Delta c_{sj}}{c_{sj}} = -\tau_1 \quad \text{eli} \quad \frac{c_{sj}^*}{c_{sj}} = 1 - \tau_1, \quad j \neq r \end{array} \right.$$

ja muiden c_{ij} -termien osalta

$$(54) \quad \frac{c_{ij}^* - c_{ij}}{c_{ij}^+ - c_{ij}} = \frac{-c_{ir}c_{sj}^\tau}{-c_{ir}c_{sj}c_{sr}} = \tau_1, \quad i \neq s, \quad j \neq r,$$

missä

$$(55) \quad c_{ij}^+ = \lim_{\epsilon_{rs} \rightarrow \infty} c_{ij}^*, \quad i \neq s, \quad j \neq r.$$

Kaavat (53) osoittavat, että parametrimuutoksen ϵ_{rs} aikaansaamat inverssielementtien suhteelliset muutokset rivillä s ja sarakkeella r käyttäytyvät kaikki funktion $-\tau_1$ osoittamalla tavalla.

Kaavat (54)-(55) puolestaan osoittavat, että myös muiden c_{ij} -elementtien ($i \neq s, j \neq r$) tietynlaiset suhteelliset muutokset määräytyvät τ_1 -funktion mukaisesti. Nyt muutokset Δc_{ij} on kuitenkin suhteutettava differensseihin $c_{ij}^+ - c_{ij}$. Helposti nähdään, että

$$c_{ij}^+ = \lim_{\epsilon \rightarrow \infty} c_{ij}^* = \lim_{\epsilon \rightarrow \infty} (c_{ij} - c_{ir}c_{sj}^\tau)$$

$$= c_{ij} - c_{ir}c_{sj} \lim_{\epsilon \rightarrow \infty} \tau = c_{ij} - \frac{c_{ir}c_{sj}}{c_{sr}}$$

on pienin yläraja parametrimuutoksen ϵ_{rs} jälkeiselle c_{ij} :n arvolle c_{ij}^* . Differenssi

$$c_{ij}^* - c_{ij} = - \frac{c_{ir}c_{sj}}{c_{sr}},$$

johon muutos Δc_{ij} suhteutetaan, on siis pienin yläraja parametrimuutoksen ϵ_{rs} aikaansaamalle muutokselle Δc_{ij} , $i \neq s$, $j \neq r$.

Funktiolle τ_1 pätee esitys

$$(56) \quad (\tau_1 - 1) \left(\epsilon_{rs} + \frac{1}{c_{sr}} \right) = - \frac{1}{c_{sr}}.$$

Tästä kaavasta nähdään, että myös τ_1 :n kuvaaja on hyperbeli. Sen asymptootteina ovat suorat

$$\tau_1 = 1 \quad \text{ja} \quad \epsilon_{rs} = - \frac{1}{c_{sr}},$$

ja käyrän kaarevuutta kuvaavaa parametrin arvo on $-1/c_{sr}$.

Kaavan (53) mukaisesti suhteet c_{sr}^*/c_{sr} , c_{ir}^*/c_{ir} ja c_{sj}^*/c_{sj} ovat ϵ :n funktioina muotoa

$$\bar{\tau}_1 = 1 - \tau_1 = (1 + c_{sr}\epsilon_{rs})^{-1}.$$

Tämä voidaan edelleen muokata muotoon

$$(57) \quad (\bar{\tau}_1)(\epsilon_{rs} + 1/c_{sr}) = 1/c_{sr}.$$

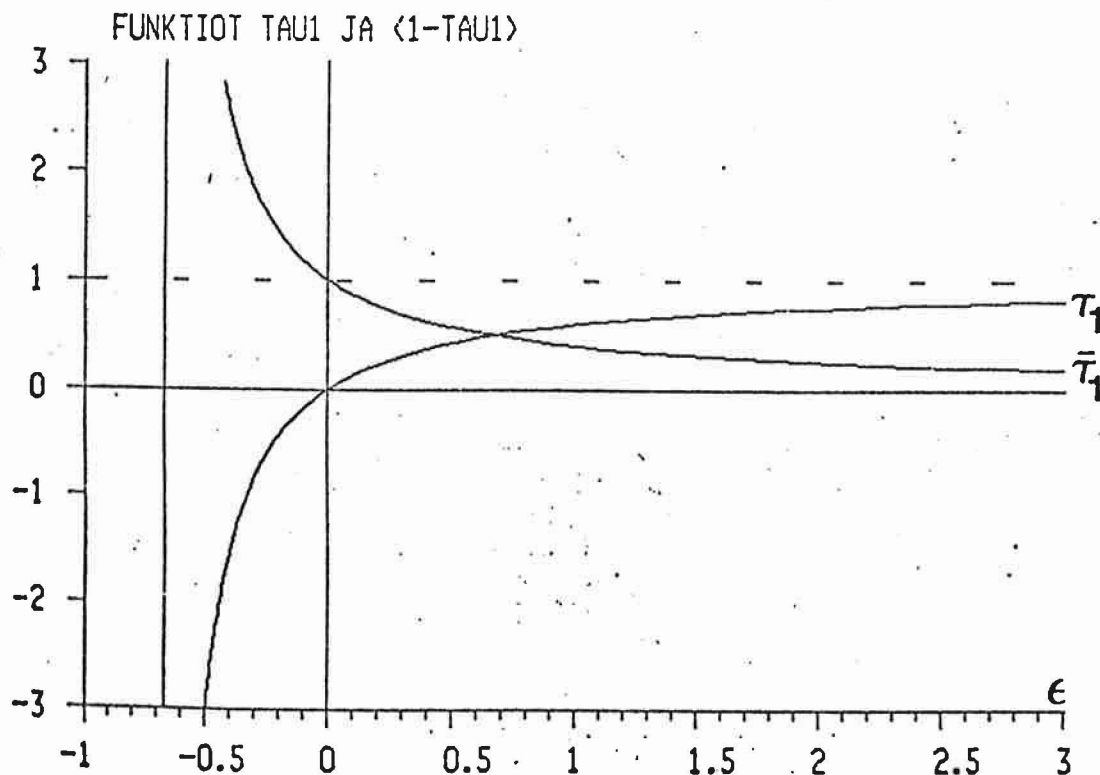
Funktion $\bar{\tau}_1$ kuvaaja on siis hyperbeli, jonka asymptootteina ovat suorat

$$\bar{\tau}_1 = 0 \text{ ja } \epsilon_{rs} = -1/c_{sr}.$$

Käyrän kaarevuutta kuvaavan parametrin arvo on $1/c_{sr}$.

Kuviossa 2 on esitetty funktioiden τ_1 ja $\bar{\tau}_1$ kuvaajat positiivisella parametrin avulla $c_{sr} = 1.5$.

Kuvio 2. Kuvaajat $\tau_1(\epsilon; 1.5)$ ja $\bar{\tau}_1(\epsilon; 1.5)$, eli redusoidun muodon kertoimista muodostettujen suhdelukujen käyttäytyminen ϵ :n varioidessa



Kerrointen c_{ij}^* ja c_{ij}^+ välillä vallitsee mielenkiintoinen relaatio

$$c_{ij}^* - c_{ij} = \tau_1 (c_{ij}^+ - c_{ij}),$$

josta edelleen

$$(58) \quad c_{ij}^* = \tau_1 c_{ij}^+ + \bar{\tau}_1 c_{ij}, \quad i \neq s, \quad j \neq r,$$

missä $\tau_1 \in [0, 1)$, $\bar{\tau}_1 \in (0, 1]$, kun $\varepsilon \geq 0$ ja $\tau_1 + \bar{\tau}_1 = 1$.

Kaava (58) osoittaa, että parametrimuutoksen ε_{rs} jälkeinen inverssielementin arvo c_{ij}^* , $i \neq s$, $j \neq r$, on painotettu keskiarvo parametrimuutokseen liittyvästä c_{ij} :n ylärajasta c_{ij}^+ sekä po. elementin alkuperäisestä arvosta c_{ij} . Painotettavat entiteetit c_{ij}^+ ja c_{ij} ovat riippumattomia muutoksen ε_{rs} arvosta, mutta painot τ_1 ja $\bar{\tau}_1$ riippuvat muutoksesta ε_{rs} sekä takaisinkytkentäparametrusta c_{sr} .

Vastaava tarkastelu kuin edellä inverssielementeille suoritettu voidaan tehdä myös π_{ik} -elementeille. Tarkastellaan ensin Π -matriisin riviä s , jonka elementeille pätee

$$\Delta \pi_{sk} = -c_{sr} \pi_{sk} \tau, \quad k \in M$$

Elementtien suhteellisille muutoksille saadaan esitys

$$(59) \quad \frac{\Delta \pi_{sk}}{\pi_{sk}} = -\tau_1 \quad \text{eli} \quad \frac{\pi_{sk}^*}{\pi_{sk}} = 1 - \tau_1 = \bar{\tau}_1, \quad k \in M.$$

Muiden elementtien muutosten

$$\Delta \pi_{ik} = -c_{ir} \pi_{sk} \tau, \quad i \neq s, \quad k \in M$$

osalta tarkastellaan suhteellisia muutoksia

$$(60) \quad \frac{\Delta \pi_{ik}}{\pi_{ik}^+ - \pi_{ik}} = \frac{-c_{ir} \pi_{sk} \tau}{-c_{ir} \pi_{sk} c_{sr}^{-1}} = \tau_1,$$

missä

$$(61) \quad \pi_{ik}^+ = \lim_{\epsilon \rightarrow \infty} \pi_{ik}^* = \pi_{ik} - \frac{c_{ir} \pi_{sk}}{c_{sr}}.$$

Redusoidun muodon kerroinmatriisin Π elementtien suhteelliset muutokset käyttäytyvät siis täysin analogisesti inverssi-elementtien suhteellisten muutosten kanssa ja po. käyttäytymistä voidaan kuvata funktion τ_1 avulla. Tarkastelussa esiintulleet raja-arvot c_{ij}^+ ja π_{ik}^+ tulevat jatkossa uudestaan vastaan mallin osittain redusoitujen muotojen yhteydessä.

Edellä esitetty raja-arvotarkastelu kannattaa tiivistää erityisen lauseen muotoon. Sitä varten on ensin esitettävä apulause, joka perustellaan myöhemmin osittain redusoitujen muotojen yhteydessä.

Apulause: Muunnettaessa matriisiesitys $(C \Pi \hat{y})$ eli mallin redusoidun muodon kertoimet ja perusratkaisu muotoon $(C^+ \Pi^+ y^+)$ siten, että

$$(62) \quad \left\{ \begin{array}{l} c_{ij}^+ = \begin{cases} 1/c_{sr}, & i=s, j=r, & \text{(elementti } c_{sr}), \\ c_{sj}/c_{sr}, & i=s, j \neq r, & \text{(rivi } s \in N), \\ -c_{ir}/c_{sr}, & i \neq s, j=r, & \text{(sarake } r \in N), \\ c_{ij} - c_{ir}c_{sj}/c_{sr}, & i \neq s, j \neq r, & \text{(muut elementit)}, \end{cases} \\ \\ \pi_{ik}^+ = \begin{cases} \pi_{sk}/\pi_{sk}, & i=s, & \text{(rivi } s \in N), \\ \pi_{ik} - c_{is}\pi_{sk}/c_{sr}, & i \neq s, & \text{(muut elementit)}, \end{cases} \\ \\ y_i^+ = \begin{cases} y_s/c_{sr}, & i=s, & \text{(elementti } s \in N), \\ y_i - c_{ir}y_s/c_{sr}, & i \neq s, & \text{(muut elementit)}, \end{cases} \end{array} \right.$$

päästään matriisiesitykseen $(C^+ \Pi^+ y^+)$, jossa C^+ on säännöllinen matriisi, jos elementti $c_{sr} \neq 0$ ja matriisi C on säännöllinen.

Apulauseen nojalla kirjoitetaan raja-arvotarkastelun täydentävä teoreema seurauslauseineen.

Lause 1:

Muutettaessa simultaanimallin rakennemuodon (ΓB) endogeenisen kerroinmatriisin elementtiä γ_{rs} siten, että $\gamma_{rs}^* = \gamma_{rs} + \epsilon$,

ovat muutoksen jälkeisen uuden redusoidun muodon kertoimien ja uuden ratkaisun raja-arvot ϵ :n kasvaessa äärelliset, jos elementti $c_{sr} \neq 0$, ja tällöin

$$\lim_{\epsilon \rightarrow \infty} C^*(\epsilon) = \tilde{C}$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow \infty} \Pi^*(\epsilon) = \tilde{\Pi}$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow \infty} y^*(\epsilon) = \tilde{y},$$

missä matriisien $(\tilde{C} \ \tilde{\Pi} \ \tilde{y})$ elementit ovat kuten matriisien $(C^+ \ \Pi^+ \ y^+)$ elementit esityksessä (62) kuitenkin siten, että matriisin $(C^+ \ \Pi^+ \ y^+)$ rivi s ja C^+ -matriisin sarake r on nollattu.

Todistus. Tämän kappaleen aikaisemmat raja-arvotarkastelut täydennettynä vastaavalla ratkaisun muutoksen (ks. kappale 3.3.) tarkastelulla osoittavat teoreeman oikeaksi tapauksessa $c_{sr} > 0$. Tapaus $c_{sr} < 0$ voidaan todistaa aivan vastaavalla tavalla.

Samoihin raja-arvoihin \tilde{C} , $\tilde{\Pi}$ ja \tilde{y} päästään itse asiassa silloinkin kun $\epsilon \rightarrow -\infty$, edellyttäen jälleen, että $c_{sr} \neq 0$.

Seurauslause: Muutettaessa kerroinelementtiä γ_{rs} siten, että $\gamma_{rs}^* = \gamma_{rs} + \epsilon$, ovat uusi redusoitu muoto ja ratkaisu

$$(63) \quad (C^* \ \Pi^* \ y^*) = \bar{\tau}_1(C \ \Pi \ \hat{y}) + \tau_1(\tilde{C} \ \tilde{\Pi} \ \tilde{y}).$$

Tulos pätee, kun $c_{sr} \neq 0$ ja $\epsilon \neq -1/c_{sr}$. Erityisesti jos $c_{sr}\epsilon > 0$, kyseessä on lähtökohtatilanteen ja raja-arvon painotettu keskiarvo.

Todistus. Väite on aiemmin johdetun kaavan (58) helposti todennettava yleistys.

3.5. Eksogeenisen muuttujan kertoimen muutos

Eksogeenisessä¹⁾ kerroinmatriisissa B tapahtuvan parametrimuutoksen vaikutukset mallin redusoidun muodon matriiseihin C ja Π sekä mallin ratkaisuun on nopeasti todettu: muutetaan esimerkiksi parametria β_{uv} , $u \in N$, $v \in M$, lisäyksen κ_{uv} verran, jolloin sen uusi arvo on $\beta_{uv}^* = \beta_{uv} + \kappa_{uv}$. Malli voidaan nyt esittää

$$(64) \quad \Gamma y = B^* z + d, \text{ jossa}$$

$$(65) \quad B^* = B + \kappa_{uv} E_{uv}.$$

Mallia (64) vastaava redusoitu muoto on

1) Jatkossa ei olla kiinnostuneita ennaltamäärättyjen muuttujien luonteesta, vaan kaikista z -muuttujista käytetään nimikettä eksogeeninen muuttuja.

$$(66) \quad y = \Gamma^{-1} B^* z + \Gamma^{-1} d \\ = \Pi^* z + Cd,$$

jossa täällä kertaa

$$(67) \quad \Pi^* = CB^* .$$

Mallin inverssi $C = \Gamma^{-1}$ ei tietenkään muutu miksikään eksogeenisen parametrin muutoksen johdosta. Mallin redusoidun muodon kerroinmatriisi sitä vastoin muuttuu määrällä $\Delta\Pi$, joka on

$$(68) \quad \Delta\Pi = \Pi^* - \Pi = CB^* - CB = C(B^* - B) \\ = C\kappa_{uv} E_{uv} = \kappa_{uv} CE_{uv} .$$

Lauseke $\kappa_{uv} CE_{uv}$ on komponenttimuodossa esitettynä seuraava:

$$(69) \quad \begin{cases} \Delta\pi_{ij} = 0, & i \in N, j \in M - \{v\} \\ \Delta\pi_{iv} = \kappa_{uv} c_{iu}, & i \in N. \end{cases}$$

Parametrin β_{uv} muutos aiheuttaa siis muutoksia vain Π -matriisin sarakkeella v , muut $m-1$ saraketta pysyvät ennallaan:

Muutokset mallin ratkaisussa nähdään myös helposti. Merkittään jälleen perusratkaisua symbolilla \hat{y} ja muutetun mallin (64) ratkaisua symbolilla y^* . Uuden ratkaisun ja perusrat-

kaisun erotukseksi $\Delta \hat{y} = y^* - \hat{y}$ saadaan nyt

$$\begin{aligned}
 (70) \quad \Delta \hat{y} &= \Pi^* z + Cd - \Pi z - Cd \\
 &= (\Pi^* - \Pi) z \\
 &= \kappa_{uv}^{CE} z,
 \end{aligned}$$

minkä komponenttiesitys on

$$(71) \quad \Delta \hat{y}_i = y_i^* - \hat{y}_i = \kappa_{uv} c_{iu} z_v, \quad i \in N.$$

Muuttujan y_i , $i \in N$, ratkaisuarvo voi siis muuttua vain, jos $c_{iu} \neq 0$ eli mikäli muuttujasta y_u (jonka yhtälössä häiriö tapahtuu) on takaisinkytkentä tarkasteltavaan muuttujaan y_i .

Tiivistetään esitys määrittelemällä ennaltamäärätyn muuttujan z_v kertoimen β_{uv} muutoksen κ_{uv} vaikutus mallin redusoidun muodon matriiseihin C ja Π sekä ratkaisuun \hat{y} operaation u_{uv} avulla.

Määritelmä 2: Merkitään rakennemuodon kertoimen β_{uv} lisäyksen κ_{uv} aiheuttamaa siirtymistä matriisista $(C \ \Pi \ \hat{y})$ matriisiin $(C^* \ \Pi^* \ y^*)$ seuraavasti:

$$(72) \quad (C^* \ \Pi^* \ y^*) = u_{uv}^{(\kappa)} (C \ \Pi \ \hat{y}).$$

Operaation $u_{uv}^{(\kappa)}$ määrittelee kaava

$$(73) \quad \left\{ \begin{array}{l} c_{ij}^* = c_{ij}, \quad i, j \in N \\ \pi_{ij}^* = \pi_{ij}, \quad i \in N, j \in M - \{v\} \\ \pi_{iv}^* = \pi_{iv} + \kappa_{uv} c_{iu}, \quad i \in N \\ \gamma_i^* = \hat{\gamma}_i + \kappa_{uv} c_{iu} z_v, \quad i \in N. \end{array} \right.$$

u -operaatiolla on vastaavat ominaisuudet (i)-(iii) kuin R -operaatiollakin eli

$$(i) \quad u_{u_1 v_1}^{(\kappa_1)} u_{u_2 v_2}^{(\kappa_2)} = u_{u_2 v_2}^{(\kappa_2)} u_{u_1 v_1}^{(\kappa_1)}$$

$$(ii) \quad u_{uv}^{(\kappa_1)} u_{uv}^{(\kappa_2)} = u_{uv}^{(\kappa_2)} u_{uv}^{(\kappa_1)} = u_{uv}^{(\kappa_1 + \kappa_2)}$$

$$(iii) \quad u_{uv}^{(\kappa)} u_{uv}^{(-\kappa)} = u_{uv}^{(0)} = I.$$

Mikäli useita mallin β -kertoimia muutetaan yhtäaikaan, se voidaan luonnollisesti tulkita myös useaksi peräkkäiseksi yhden kertoimen muutokseksi. Yksittäisten u -operaatioiden suoritusjärjestyksellä ei ole merkitystä. Vastaavasti voidaan ajatella γ -kerrointenkin muutosten osalta.

Toisin sanoen, jos mallissa muutetaan kertoimia γ_{ij} , missä $(i, j) \in T$, niin korjattu redusoitu muoto voidaan saada perättäisillä R -operaatioilla

$$(74) \quad (C^* \Pi^* y^*) = \prod_{(i,j) \in T} R_{ij}^{(\epsilon_{ij})} (C \Pi \hat{y}),$$

jossa siis operaatioiden suoritusjärjestyksellä ei ole merkitystä. Vastaavasti muutettaessa joitakin eksogeenisen kerroinmatriisin elementtejä β_{ik} , $(i,k) \in T'$ saadaan

$$(75) \quad (C^* \Pi^* y^*) = \prod_{(i,k) \in T'} u_{ik}^{(\kappa_{ik})} (C \Pi \hat{y}),$$

operaatiot suoritettuna missä järjestyksessä hyvänsä.

Edelleen voidaan osoittaa, että R - ja u -operaatiot kommutoivat, ts.

$$(76) \quad R_{rs}^{(\epsilon_{rs})} u_{uv}^{(\kappa_{uv})} = u_{uv}^{(\kappa_{uv})} R_{rs}^{(\epsilon_{rs})}, \quad r, u, s \in N \text{ ja } v \in M.$$

3.6. Esimerkkejä

Matriisien C ja Π sekä vektorin \hat{y} muutoksia tutkittaessa voidaan rajoittua ottamaan tarkasteluihin mukaan vain kiinnostavina pidetyt matriisielementit laskennan kannalta välttämättömien elementtien lisäksi. Niitä $C:n$, $\Pi:n$ ja $\hat{y}:n$ elementtejä, joista ei olla kiinnostuneita, ei siis välttämättä tarvitse kuljettaa laskelmissa mukana, kuten edellä on toistuvasti tähdennettykin.

Jatkossa tarkastellaankin usein redusoidun muodon asetelman $(C \Pi \hat{y})$ sijasta matriisiasetelmaa

$$[C \Pi \hat{y}],$$

jota kutsutaan *mallikaavioksi*. Hakasuluilla merkitty mallikaavio $[C \Pi \hat{y}]$ koostuu samoista c_{ij} -, π_{ik} - ja \hat{y}_i -elementeistä kuin kaarisuluilla merkitty redusoidun muodon asetelma $(C \Pi \hat{y})$, mutta mallikaaviossa ei ole mukana kaikkia $C:n$, $\Pi:n$ ja $\hat{y}:n$ elementtejä.

Täsmällisemmin asia voidaan esittää määrittelemällä poistooperaatiot (deletointioperaatiot) \mathcal{D}^R ja \mathcal{D}^S siten, että

\mathcal{D}_u^R poistaa argumenttimatriisin rivin u ja

\mathcal{D}_v^S poistaa argumenttimatriisin sarakkeen v .

Vastaavasti

$\mathcal{D}_U^R = \prod_{u \in U} \mathcal{D}_u^R$ poistaa kaikki indeksijoukon U osoittamat argumenttimatriisin rivit ja

$\mathcal{D}_V^S = \prod_{v \in V} \mathcal{D}_v^S$ poistaa kaikki indeksijoukon V osoittamat argumenttimatriisin sarakkeet.

Suoritetaan nyt redusoidun muodon yhtälöille ja perusratkaisuvektorin komponenteille ositus

$$(N_1, N-N_1) ,$$

mallin d-vektorin komponenteille ositus

$$(N_2, N-N_2)$$

sekä mallin ennaltamäärättyjen muuttujien vektorin z komponenteille ositus

$$(M_1, M-M_1) .$$

Indeksijoukkoja (N_1, N_2, M_1) vastaava mallikaavio saadaan nyt matriisista $(C \Pi \hat{y})$ suorittamalla asianmukaiset deletointioperaatiot eli

$$(77) \quad [C \Pi \hat{y}] = D_{N-N_1}^r D_{N-N_2}^s D_{M-M_1}^s \quad (C \Pi \hat{y}) .$$

Ositusten $(N_1, N-N_1)$ jne. valinnassa on kysymys juuri kiinnostavien elementtien (ja kiinnostavien parametrimuutosten) valinnasta.

Mainittakoon vielä, että mallikaaviossa matriisin $[C]$ ei tarvitse olla neliömatriisi.

Herkkyystarkastelujen suorittamiseksi käytännössä laadittiin Wang 2200-pientietokoneelle BASIC-2 -kielinen ohjelma, jota

hyväksi käyttäen tuotettiin kaikki tässä kirjoituksessa esitetyt esimerkkilaskelmat. Ohjelmaa ei tässä kuvailla sen enempää; tarkoituksena on laatia siitä erillinen ohjelma-dokumentti yksityiskohtaisine käyttöohjeineen.

Tarkasteltava mallikaavio perustuu ETLAn mallin linearisoidun version tuoreisiin (v. 1979) C- ja Π -matriiseihin sekä po. vuoden toteutuneita ennalta määrättyjen muuttujien arvoja vastaavaan perusratkaisuun \hat{y} . Peruskaavioon valittiin seuraavat keskeisiksi arvioidut endogeeniset muuttujat (mallikaavion rivit):

symboli selitys¹⁾

N	varastojen muutos
xgw	länsitavaravienti, määrä
mg	tavaratuonti, määrä
aII	ansiotyöpanos
DU	työttömyysasteen muutos
wI	ansiotaso
pcpr	yksityinen kulutus, hinta
pipr	yksityiset investoinnit, hinta
pxgD	tavaraviennin hinta (ulkomaan valuutassa)
pcg	julkinen kulutus, hinta
cpr	yksityinen kulutus, määrä
iasc	yksityiset investoinnit asuinrakennusinvestointeja lukuunottamatta, määrä
H	yksikkötyökustannukset
WZD	käytettävissä olevat tulot, arvo
m	kokonaistuonti, määrä
d	kokonaiskysyntä, määrä
y	bruttokansantuote, määrä

1) Tarkemmat selitykset ovat löydettävissä liitteestä 1.

Inverssin sarakkeista valittiin mallikaavioon muuttujia

N, xgw, mg, aII, DU, wI, pcpr, pipr, pxgD, pcg,
cpr ja iasc

vastaavat sarakkeet, ts. käyttäytymisyhtälöitä vastaava osa kaavion riveille valituista muuttujista.

Matriisin Π sarakkeista valittiin kaavioon seuraavia ennaltamäärättyjä muuttujia vastaavat sarakkeet:

<u>symboli</u>	<u>selitys</u>
const	vakio
WZD/1	käytettävissä oleva tulo yhdellä jaksolla viivästettynä
Cpr/1	yksityisen kulutuksen arvo yhdellä jaksolla viivästettynä
mw	viennin kysyntätekijä
pmgD	tavaratuonnin hinta (ulkomaan valuutassa)
F	poistot, arvo
TiDN	välilliset verot miinus tukipalkkiot, kohtaanto
SUB	tukipalkkiot
wex	valuuttakurssit

Perusratkaisuvektori (B.S.) sijoittui ohjelmassa $[\Pi]$ -matriisin (P) ensimmäiseksi sarakkeeksi.

Mallikaavio näyttää tässä vaiheessa seuraavalta:

C(i,j)

	- 1 -											
	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9	-10	-11	-12
	N	xgw	mg	aII	DU	wI	pcpr	pipr	pxgD	pcg	cpr	iasc
-1 N	1.02	0.04	-0.03	0.05	-0.21	-0.02	-0.02	0.00	-0.02	0.01	0.10	0.02
-2 xgw	0.01	1.00	0.00	-0.09	0.10	-0.13	-0.08	0.00	-0.52	0.00	0.00	0.00
-3 mg	3.45	0.68	0.55	0.97	-3.83	-0.12	-0.06	0.04	-0.20	0.20	1.63	0.41
-4 aII	0.35	0.11	-0.20	1.14	-0.56	-0.09	-0.09	-0.01	-0.05	0.02	0.26	0.07
-5 DU	-0.10	-0.03	0.06	-0.33	1.16	0.03	0.03	0.00	0.02	-0.01	-0.09	-0.02
-6 wI	0.23	0.07	-0.14	-0.05	-1.43	1.20	0.63	-0.01	-0.04	0.07	0.19	0.04
-7 pcpr	0.03	0.01	-0.02	0.15	-0.44	0.45	1.25	0.00	0.00	0.00	0.02	0.01
-8 pipr	0.03	0.01	-0.02	0.15	-0.44	0.45	0.25	1.00	0.00	0.00	0.02	0.01
-9 pxgD	-0.01	0.00	0.01	0.17	-0.19	0.25	0.15	0.00	1.00	0.00	-0.01	0.00
-10 pcg	0.07	0.02	-0.04	0.81	-0.91	0.93	0.52	0.00	-0.01	1.00	0.05	0.01
-11 cpr	0.33	0.10	-0.19	0.93	-2.99	-0.03	-0.42	-0.01	-0.05	0.02	1.25	0.05
-12 iasc	-0.01	0.25	-0.73	-0.45	-0.31	-0.81	0.43	-0.10	0.37	0.37	0.62	1.15
-13 H	0.09	0.03	-0.05	0.40	-1.20	1.23	0.69	0.00	-0.01	0.01	0.07	0.02
-14 WZD	0.28	0.09	-0.17	0.53	-0.97	0.54	0.26	-0.01	-0.05	0.01	0.21	0.05
-15 a	3.03	0.60	0.49	0.85	-3.37	-0.10	-0.05	0.03	-0.17	0.18	1.44	0.36
-16 d	1.17	0.29	-0.19	0.37	-1.54	-0.15	-0.18	-0.02	-0.13	0.05	0.69	0.17
-17 y	0.64	0.20	-0.37	0.24	-1.02	-0.17	-0.21	-0.03	-0.12	0.02	0.48	0.12

P(i,k)

	- 1 -									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	B.S. const.	WZD/1	Cpr/1	mw	pxgD	F	TiDN	SUB	wex	
-1 N	1.73	0.71	0.04	-0.04	0.09	0.03	-0.01	-0.01	0.00	0.05
-2 xgw	15.61	-3.49	0.00	0.00	2.34	-0.01	0.00	-0.02	0.00	0.09
-3 mg	12.19	-0.48	0.71	-0.71	1.58	-0.40	-0.12	-0.02	0.04	-0.05
-4 aII	5.37	-0.16	0.11	-0.11	0.26	0.05	-0.02	-0.02	0.01	0.08
-5 DU	-0.86	0.73	-0.03	0.03	-0.07	-0.01	0.01	0.01	0.00	-0.02
-6 wI	9.28	1.38	0.08	-0.08	0.17	0.15	-0.02	0.13	0.00	0.17
-7 pcpr	5.63	2.34	0.01	-0.01	0.02	0.21	0.00	0.26	0.00	0.21
-8 pipr	7.78	1.34	0.01	-0.01	0.02	0.30	0.00	0.05	0.00	0.31
-9 pxgD	11.55	0.62	0.00	0.00	-0.01	0.02	0.00	0.03	0.00	-0.17
-10 pcg	7.66	3.82	0.02	-0.02	0.05	0.16	0.00	0.11	0.00	0.16
-11 cpr	8.26	0.00	0.54	-0.54	0.24	-0.01	-0.02	-0.09	0.01	0.03
-12 iasc	13.45	7.10	0.27	-0.27	0.57	-0.27	-0.35	0.09	0.12	0.23
-13 H	4.97	0.71	0.03	-0.03	0.07	0.13	-0.01	0.14	0.00	0.14
-14 WZD	14.48	0.59	0.09	-0.09	0.21	0.10	-0.02	0.05	0.01	0.12
-15 a	10.91	-0.42	0.63	-0.63	1.39	-0.35	-0.11	-0.02	0.04	-0.04
-16 d	10.93	0.84	0.30	-0.30	0.67	0.00	-0.05	-0.04	0.02	0.10
-17 y	10.96	3.52	0.21	-0.21	0.47	0.09	-0.04	-0.04	0.01	0.15

Tarkastellaan ensimmäisenä esimerkkinä, miten yksikkötyökustannusten (endogeeninen muuttuja II) kertoimen muuttuminen kuluttajahintojen (muuttuja pcpr) yhtälössä muuttaisi mallin redusoitua muotoa ja perusratkaisua. Mallin rakenne-
muodon kerroin $\gamma_{pcpr,H} = -.362$. Muutetaan nyt tätä kerrointa vähentämällä siitä aluksi .15 ($\epsilon_{pcpr,H} = -.15$) ja sen jälkeen lisäämällä siihen .15 ($\epsilon_{pcpr,H} = .15$). Nämä muutokset voivat tuntua epärealistisen suurilta, mutta kun otetaan huomioon, että $\gamma_{pcpr,H}$:n estimaatin keskihajonta on niinkin iso kuin .196 (ks. Vartia (1974), s. 109), ei näitä muutoksia voine pitää aivan mahdottomina.

Muutosten jälkeisten mallikaavioiden ja alkuperäisen mallikaavion erotukset

$$[C^* \Pi^* y^*] - [C \Pi \hat{y}]$$

näyttävät seuraavilta (s. 53-54):

Muutoksen jälkeisten ja niitä edeltäneen mallikaavion erotusten tarkastelu osoittaa, että parametrimuutoksen aiheuttamat poikkeamat ovat kauttaaltaan melko vähäisiä. Tämä ei ole niinkään yllättävää, kun ajatellaan, että "vaarallisen suunnan" muutos $\epsilon_{pcpr,H} = -.15$ on vielä varsin kaukana navasta

$$\epsilon_{pcpr,H} = -(1/c_{H,pcpr}) = -1.45$$

Suurin muutos perusratkaisun komponenteissa tapahtuu juuri muuttujan pcpr kohdalla, jonka reaktioyhtälöä häirittiin selittäjän H kerrointa muuttamalla:

$$\Delta \hat{y}_{pcpr} = 1.04, \text{ kun } \epsilon_{pcpr,H} = -.15.$$

Tarkastellaan vielä tarkemmin perusratkaisun herkkyyttä pienillä $\epsilon_{pcpr,H}$ -muutoksilla antamalla muutoksen varioida .01 yksikön askelin välillä [-.1, .1]. Näissä tarkasteluissa ohjelma laskee ja tulostaa myös kulloistakin ϵ -muutosta vastaavan d-termimuutoksen arvon. Tulokset näyttävät seuraavalta (s. 56):

Parametrin (pcpr,H) muutos

	pcpr	H	muutos																
muutos	d-tcrmi	N	xgw	mg	aII	DU	wI	pcpr	pipr	pxgD	pcg	cpr	iasc	H	WZD	m	d	y	
1	00.10	-00.455	0.01	0.04	0.03	0.04	-0.01	-0.29	-0.58	-0.12	-0.07	-0.24	0.20	-0.20	-0.32	-0.12	0.03	0.08	0.10
2	00.09	-00.421	0.01	0.03	0.03	0.04	-0.01	-0.26	-0.53	-0.10	-0.06	-0.22	0.18	-0.18	-0.29	-0.11	0.02	0.07	0.09
3	00.08	-00.377	0.01	0.03	0.02	0.03	-0.01	-0.24	-0.47	-0.09	-0.06	-0.20	0.16	-0.16	-0.26	-0.10	0.02	0.07	0.08
4	00.07	-00.332	0.01	0.03	0.02	0.03	-0.01	-0.21	-0.41	-0.08	-0.05	-0.17	0.14	-0.14	-0.23	-0.09	0.02	0.05	0.07
5	00.06	-00.286	0.01	0.02	0.02	0.03	-0.01	-0.18	-0.36	-0.07	-0.04	-0.15	0.12	-0.12	-0.20	-0.07	0.02	0.05	0.06
6	00.05	-00.240	0.01	0.02	0.02	0.02	-0.01	-0.15	-0.30	-0.06	-0.04	-0.12	0.10	-0.10	-0.16	-0.06	0.01	0.04	0.05
7	00.04	-00.193	0.00	0.01	0.01	0.02	-0.01	-0.12	-0.24	-0.05	-0.03	-0.10	0.08	-0.08	-0.13	-0.05	0.01	0.03	0.04
8	00.03	-00.146	0.00	0.01	0.01	0.01	0.00	-0.09	-0.18	-0.04	-0.02	-0.08	0.06	-0.06	-0.10	-0.04	0.01	0.03	0.03
9	00.02	-00.098	0.00	0.01	0.01	0.01	0.00	-0.06	-0.12	-0.02	-0.01	-0.05	0.04	-0.04	-0.07	-0.03	0.01	0.02	0.02
10	00.01	-00.049	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	-0.03	-0.06	-0.01	-0.01	-0.03	0.02	-0.02	-0.03	-0.01	0.00	0.01	0.01
11	00.00	00.000	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
12	-00.01	00.050	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.03	0.06	0.01	0.01	0.03	-0.02	0.02	0.03	0.01	0.00	-0.01	-0.01
13	-00.02	00.101	0.00	-0.01	-0.01	-0.01	0.00	0.06	0.13	0.03	0.01	0.05	-0.04	0.04	0.07	0.03	-0.01	-0.02	-0.02
14	-00.03	00.152	0.00	-0.01	-0.01	-0.01	0.00	0.10	0.19	0.04	0.02	0.08	-0.06	0.07	0.10	0.04	-0.01	-0.03	-0.03
15	-00.04	00.204	0.00	-0.02	-0.01	-0.02	0.01	0.13	0.25	0.05	0.03	0.11	-0.09	0.09	0.14	0.05	-0.01	-0.04	-0.04
16	-00.05	00.257	-0.01	-0.02	-0.02	-0.02	0.01	0.16	0.32	0.06	0.04	0.13	-0.11	0.11	0.18	0.07	-0.01	-0.05	-0.05
17	-00.06	00.311	-0.01	-0.02	-0.02	-0.03	0.01	0.19	0.39	0.09	0.05	0.16	-0.13	0.13	0.21	0.03	-0.02	-0.05	-0.07
18	-00.07	00.365	-0.01	-0.03	-0.02	-0.03	0.01	0.23	0.46	0.09	0.05	0.19	-0.15	0.16	0.25	0.09	-0.02	-0.06	-0.08
19	-00.08	00.420	-0.01	-0.03	-0.03	-0.04	0.01	0.26	0.52	0.10	0.06	0.22	-0.18	0.18	0.29	0.11	-0.02	-0.07	-0.09
20	-00.09	00.476	-0.01	-0.04	-0.03	-0.04	0.01	0.30	0.59	0.12	0.07	0.25	-0.20	0.21	0.33	0.12	-0.03	-0.08	-0.10
21	-00.10	00.533	-0.01	-0.04	-0.03	-0.05	0.01	0.33	0.67	0.13	0.08	0.28	-0.23	0.23	0.37	0.14	-0.03	-0.09	-0.11

Esimerkki havainnollistaa, kuinka pienillä ϵ -muutoksilla approksimaatio $\tau = \epsilon$ toimii varsin hyvin: esim. poikkeaman $\epsilon_{pcpr,H}$ kaksinkertaistaminen vaikuttaa suunnilleen kaksinkertaistavasti vastavaan d-termiin, pienillä vaihteluilla tarkasteltuna.

Tarkastellaan vielä saman $\epsilon_{pcpr,H}$ -esimerkin puitteissa τ -, τ_1 - ja $\bar{\tau}_1$ -funktioita. Parametrimuutoksen vaihteluvälillä [-.1, .1] saadaan po. funktioille seuraavanlaisia arvoja:

Parametrin ($\epsilon_{pcpr,H}$) muutos

LISAYS	KAARE- TAU	KAARE- UUUS	KAARE- TAU1	KAARE- UUUS	KAARE- 1-TAU1	KAARE- UUUS	C'(S,R)	KAARE- UUUS
0.100	0.093	-0.437	0.064	-0.485	0.935	-0.416	0.641	0.445
0.090	0.084	-0.441	0.058	-0.489	0.941	-0.422	0.645	0.446
0.080	0.075	-0.446	0.051	-0.493	0.948	-0.428	0.649	0.451
0.070	0.066	-0.450	0.045	-0.498	0.954	-0.434	0.653	0.455
0.060	0.057	-0.455	0.039	-0.502	0.960	-0.440	0.657	0.458
0.050	0.048	-0.460	0.033	-0.506	0.966	-0.446	0.662	0.461
0.040	0.038	-0.464	0.026	-0.510	0.973	-0.452	0.666	0.464
0.030	0.029	-0.469	0.020	-0.514	0.979	-0.458	0.671	0.467
0.020	0.019	-0.474	0.013	-0.518	0.986	-0.464	0.675	0.470
0.010	0.009	-0.479	0.006	-0.523	0.993	-0.470	0.680	0.473
0.000	0.000	-0.484	0.000	-0.526	1.000	-0.476	0.685	0.476
-0.010	-0.010	-0.489	-0.006	-0.530	1.006	-0.483	0.689	0.479
-0.020	-0.020	-0.494	-0.013	-0.534	1.013	-0.489	0.694	0.482
-0.030	-0.030	-0.499	-0.020	-0.538	1.020	-0.495	0.699	0.485
-0.040	-0.041	-0.504	-0.028	-0.541	1.028	-0.502	0.704	0.488
-0.050	-0.051	-0.509	-0.035	-0.545	1.035	-0.508	0.709	0.491
-0.060	-0.062	-0.515	-0.042	-0.548	1.042	-0.515	0.714	0.494
-0.070	-0.073	-0.520	-0.050	-0.552	1.050	-0.521	0.719	0.496
-0.080	-0.084	-0.525	-0.057	-0.555	1.057	-0.528	0.724	0.499
-0.090	-0.095	-0.531	-0.065	-0.558	1.065	-0.534	0.730	0.501
-0.100	-0.107	-0.536	-0.073	-0.561	1.073	-0.541	0.735	0.504

Tämäkin asetelma osoittaa, kuinka τ -funktio on lähes lineaarinen argumentin ϵ saadessa itseisarvoltaan pieniä arvoja. Sarake, joka on otsikoitu "C'(S,R)", osoittaa parametrin c_{sr} uuden arvon ϵ_{rs} -muutoksen jälkeen. Se suunta, jossa elementin c_{sr} eli tässä $c_{H,pcpr}$ itseisarvo kasvaa, on "vaarallinen", koska τ -funktion napa lähenee tällöin nollaa. Po. esimerkissä ei tosin liikuta vielä vaarallisen suurten muutosten lähimaillakaan. Tarkasteltavien hyperbelien kaarevuutta kuvaavien parametrien saamat arvot on tulostettu omilla sarakkeillaan.

Toisena esimerkkinä tarkastellaan kulutusyhtälön (cpr) selittäjän (WZD-pcpr) eli reaalitytulon kertoimen muutosta. Kyseessä on itse asiassa tapaus, jossa mallin kaksi kerrointa muuttuu samanaikaisesti (ja itseisarvoltaan yhtä paljon), mutta se voidaan kuitenkin käsitellä yhden parametrimuutoksen tapauksena. Voidaan nimittäin helposti osoittaa, että seuraava yksinkertainen menettely johtaa oikeaan lopputulokseen: laajennetaan aluksi mallikaaviota lisäämällä sinne uusi rivi $wzd = WZD-pcpr$, joka saadaan yksinkertaisesti vähentämällä rivistä WZD rivi pcpr. Näin mallikaavio laajenee yhdellä rivillä, kun on muodostettu uusi redusoidun muodon yhtälö muuttujalle wzd . Uusi yhtälö on pelkkä laskennallinen "häntä", eikä siitä ole mitään linkkiä taaksepäin mallin muihin yhtälöihin.

Mallikaavio näyttää tässä vaiheessa seuraavalta (s. 59):

C(i,j)

	- 1 -											
	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9	-10	-11	-12
	N	xgw	mg	all	DU	wI	pcpr	pipr	pxgD	pcg	cpr	iasc
-1 N	1.02	0.04	-0.03	0.05	-0.21	-0.02	-0.02	0.00	-0.02	0.01	0.10	0.02
-2 xgw	0.01	1.00	0.00	-0.09	0.10	-0.13	-0.08	0.00	-0.52	0.00	0.00	0.00
-3 mg	3.45	0.68	0.55	0.97	-3.83	-0.12	-0.06	0.04	-0.20	0.20	1.63	0.41
-4 all	0.35	0.11	-0.20	1.14	-0.56	-0.09	-0.09	-0.01	-0.05	0.02	0.26	0.07
-5 DU	-0.10	-0.03	0.06	-0.33	1.16	0.03	0.03	0.00	0.02	-0.01	-0.09	-0.02
-6 wI	0.23	0.07	-0.14	-0.05	-1.43	1.20	0.63	-0.01	-0.04	0.07	0.19	0.04
-7 pcpr	0.03	0.01	-0.02	0.15	-0.44	0.45	1.25	0.00	0.00	0.00	0.02	0.01
-8 pipr	0.03	0.01	-0.02	0.15	-0.44	0.45	0.25	1.00	0.00	0.00	0.02	0.01
-9 pxgD	-0.01	0.00	0.01	0.17	-0.19	0.25	0.15	0.00	1.00	0.00	-0.01	0.00
-10 pcg	0.07	0.02	-0.04	0.81	-0.91	0.93	0.52	0.00	-0.01	1.00	0.05	0.01
-11 cpr	0.33	0.10	-0.19	0.93	-2.99	-0.03	-0.42	-0.01	-0.05	0.02	1.25	0.05
-12 iasc	-0.01	0.25	-0.73	-0.45	-0.31	-0.81	0.43	-0.10	0.37	0.37	0.62	1.15
-13 H	0.09	0.03	-0.05	0.40	-1.20	1.23	0.69	0.00	-0.01	0.01	0.07	0.02
-14 WZD	0.28	0.09	-0.17	0.53	-0.97	0.54	0.26	-0.01	-0.05	0.01	0.21	0.05
-15 m	3.03	0.60	0.49	0.85	-3.37	-0.10	-0.06	0.03	-0.17	0.18	1.44	0.36
-16 d	1.17	0.29	-0.19	0.37	-1.54	-0.15	-0.18	-0.02	-0.13	0.05	0.69	0.17
-17 y	0.64	0.20	-0.37	0.24	-1.02	-0.17	-0.21	-0.03	-0.12	0.02	0.48	0.12
-18 wzd	0.25	0.08	-0.15	0.39	-0.53	0.09	-0.99	-0.01	-0.04	0.01	0.19	0.05

P(i,k)

	- 1 -									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	B.S. const.	WZD/1	Cpr/1	mw	pxgD	F	TIDN	SUB	wex	
-1 N	1.73	0.71	0.04	-0.04	0.09	0.03	-0.01	-0.01	0.00	0.05
-2 xgw	15.61	-3.49	0.00	0.00	2.34	-0.01	0.00	-0.02	0.00	0.09
-3 mg	12.19	-0.48	0.71	-0.71	1.58	-0.40	-0.12	-0.02	0.04	-0.05
-4 all	5.37	-0.16	0.11	-0.11	0.26	0.05	-0.02	-0.02	0.01	0.08
-5 DU	-0.86	0.73	-0.03	0.03	-0.07	-0.01	0.01	0.01	0.00	-0.02
-6 wI	9.28	1.38	0.08	-0.08	0.17	0.15	-0.02	0.13	0.00	0.17
-7 pcpr	5.63	2.34	0.01	-0.01	0.02	0.21	0.00	0.26	0.00	0.21
-8 pipr	7.78	1.34	0.01	-0.01	0.02	0.30	0.00	0.05	0.00	0.31
-9 pxgD	11.55	0.62	0.00	0.00	-0.01	0.02	0.00	0.03	0.00	-0.17
-10 pcg	7.66	3.82	0.02	-0.02	0.05	0.16	0.00	0.11	0.00	0.16
-11 cpr	8.26	0.00	0.54	-0.54	0.24	-0.01	-0.02	-0.09	0.01	0.03
-12 iasc	13.45	7.10	0.27	-0.27	0.57	-0.27	-0.35	0.09	0.12	0.23
-13 H	4.97	0.71	0.03	-0.03	0.07	0.13	-0.01	0.14	0.00	0.14
-14 WZD	14.48	0.59	0.09	-0.09	0.21	0.10	-0.02	0.05	0.01	0.12
-15 m	10.81	-0.42	0.63	-0.63	1.39	-0.25	-0.11	-0.02	0.04	-0.04
-16 d	10.93	0.84	0.30	-0.30	0.67	0.00	-0.05	-0.04	0.02	0.10
-17 y	10.95	3.52	0.21	-0.21	0.47	0.09	-0.04	-0.04	0.01	0.15
-18 wzd	8.85	-1.75	0.08	-0.08	0.19	-0.11	-0.01	-0.21	0.00	-0.09

Kuvatulla tavalla laajennetun mallikaavion puitteissa voidaan nyt toimia aivan kuten ennenkin: ilmoitetaan ohjelmalle, että halutaan muuttaa kerrointa $\gamma_{cpr,wzd}$ määrällä $\epsilon_{cpr,wzd}$. Ohjelma, joka tässä vaiheessa on saanut tietoonsa esim. parametrin $c_{wzd,cpr}$ arvon (= .19), suorittaa laskelmasa aivan vastaavasti kuin edellisenkin esimerkin tapauksessa välittämättä mallikaavion uuden rivin keinotekoisuudesta.

Parametrin $\gamma_{cpr,wzd}$ estimaatin keskihajonta on .071 (ks. Vartia (1974), s. 62).

Valitsemalla muutokseksi $\epsilon_{cpr,wzd}$ ensiksi -.1 ja sitten .1 saadaan erotukseksi $[C^* \Pi^* y^*] - [C \Pi \hat{y}]$ ensin (s. 61)

Kertoimien muutokset eivät tässäkään esimerkillä muodostu dramaattisen isoiksi. Mielenkiintoinen yksityiskohta on, että tavaratuonnin (mg) perusratkaisu reagoi muutoksiin voimakkaammin kuin kulutuksen perusratkaisu, vaikka nimenomaan kulutuksen yhtälöä häirittiin.

Tarkastellaankin vielä lopuksi hieman yksityiskohtaisemmin perusratkaisun muuttumista reaalityulojen kertoimen vaihdellessa. Antamalla $\epsilon_{cpr,wzd}$:n varioida .01 yksikön pituisin askelin välillä [-0.1, 0.1] saadaan seuraavanlaisia perusratkaisun muutoksia:

Parametrin (cpr,wzd) muutos

parametrin ekviv.	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9	-10	-11	-12	-13	-14	-15	-16	-17	-18		
muutos d-termi	N	xgw	mg	aII	DU	wl	pcpr	pipr	pxgD	pcg	cpr	iasc	H	WZD	m	d	y	wzd		
1	00.10	-00.859	-0.08	0.00	-1.42	-0.23	0.07	-0.15	-0.02	-0.02	0.01	-0.04	-1.09	-0.54	-0.06	-0.19	-1.25	-0.60	-0.42	-0.16
2	00.09	-00.783	-0.07	0.00	-1.29	-0.21	0.06	-0.14	-0.02	-0.02	0.01	-0.04	-0.93	-0.49	-0.05	-0.17	-1.13	-0.54	-0.38	-0.15
3	00.08	-00.698	-0.07	0.00	-1.14	-0.18	0.05	-0.12	-0.02	-0.02	0.01	-0.03	-0.87	-0.43	-0.05	-0.15	-1.00	-0.49	-0.34	-0.13
4	00.07	-00.611	-0.06	0.00	-1.00	-0.16	0.05	-0.11	-0.01	-0.01	0.01	-0.03	-0.76	-0.38	-0.04	-0.13	-0.88	-0.42	-0.29	-0.12
5	00.06	-00.525	-0.05	0.00	-0.85	-0.14	0.04	-0.09	-0.01	-0.01	0.00	-0.03	-0.65	-0.33	-0.03	-0.11	-0.75	-0.36	-0.25	-0.10
6	00.05	-00.438	-0.04	0.00	-0.72	-0.11	0.03	-0.08	-0.01	-0.01	0.00	-0.02	-0.55	-0.27	-0.03	-0.09	-0.63	-0.30	-0.21	-0.08
7	00.04	-00.351	-0.03	0.00	-0.57	-0.09	0.03	-0.05	-0.01	-0.01	0.00	-0.02	-0.44	-0.22	-0.02	-0.07	-0.51	-0.24	-0.17	-0.07
8	00.03	-00.264	-0.03	0.00	-0.43	-0.07	0.02	-0.05	-0.01	-0.01	0.00	-0.01	-0.33	-0.16	-0.02	-0.06	-0.38	-0.18	-0.13	-0.05
9	00.02	-00.175	-0.02	0.00	-0.29	-0.05	0.01	-0.03	0.00	0.00	0.00	-0.01	-0.22	-0.11	-0.01	-0.04	-0.25	-0.12	-0.08	-0.03
10	00.01	-00.088	-0.01	0.00	-0.14	-0.02	0.01	-0.02	0.00	0.00	0.00	0.00	-0.11	-0.05	-0.01	-0.02	-0.13	-0.06	-0.04	-0.02
11	00.00	00.000	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
12	-00.01	00.089	0.01	0.00	0.14	0.02	-0.01	0.02	0.00	0.00	0.00	0.00	0.11	0.06	0.01	0.02	0.13	0.06	0.04	0.02
13	-00.02	00.178	0.02	0.00	0.29	0.05	-0.01	0.03	0.00	0.00	0.00	0.01	0.22	0.11	0.01	0.04	0.26	0.12	0.09	0.03
14	-00.03	00.267	0.03	0.00	0.44	0.07	-0.02	0.05	0.01	0.01	0.00	0.01	0.33	0.17	0.02	0.06	0.38	0.18	0.13	0.05
15	-00.04	00.357	0.03	0.00	0.58	0.09	-0.03	0.06	0.01	0.01	0.00	0.02	0.45	0.22	0.02	0.08	0.51	0.25	0.17	0.07
16	-00.05	00.447	0.04	0.00	0.73	0.12	-0.03	0.08	0.01	0.01	0.00	0.02	0.56	0.28	0.03	0.10	0.64	0.31	0.21	0.08
17	-00.06	00.537	0.05	0.00	0.88	0.14	-0.04	0.09	0.01	0.01	0.00	0.03	0.67	0.33	0.04	0.11	0.77	0.37	0.26	0.10
18	-00.07	00.629	0.05	0.00	1.03	0.16	-0.05	0.11	0.02	0.02	-0.01	0.03	0.78	0.39	0.04	0.12	0.90	0.43	0.30	0.12
19	-00.08	00.719	0.07	0.00	1.17	0.19	-0.05	0.13	0.02	0.02	-0.01	0.04	0.90	0.45	0.05	0.15	1.03	0.50	0.35	0.14
20	-00.09	00.810	0.08	0.00	1.32	0.21	-0.06	0.14	0.02	0.02	-0.01	0.04	1.01	0.50	0.05	0.17	1.17	0.56	0.39	0.15
21	-00.10	00.902	0.09	0.00	1.47	0.24	-0.07	0.16	0.02	0.02	-0.01	0.05	1.13	0.56	0.06	0.19	1.30	0.62	0.43	0.17

Tulokset ovat vieläkin "lineaarisempia" kuin aikaisemmassa esimerkissä, mikä onkin selvä, koska

$$c_{wzd,cpr} = .19 < .69 = c_{H,pcpr} .$$

Pienenä yksityiskohtana voidaan vielä todeta, että länsitavaravienti (xgw) ei näytä reagoivan lainkaan kulutusyhtälön muutokseen (tarkasti ottaen $c_{xgw,cpr} = .003$).

4. SIMULTAANIMALLIN OSITTAIN REDUSOIDUT MUODOT

4.1. Johdanto

Tarkastellaan mallin rakennemuotoa (RAM) tietyllä iaksolla t . Po. jaksoon viittaava alaindeksi jätetään jatkossa pois merkintöjen yksinkertaistamiseksi.

Olettaen, että mallin virhetermit ovat additiivisia, voidaan rakennemuoto

$$H(y, z, d) = 0$$

luontevasti kirjoittaa

$$(78) \quad d = F(y, z)$$

ja merkitä

$$(79) \quad F = \begin{pmatrix} f_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n \end{pmatrix}.$$

Kirjoitustavassa (78) mallin rakennemuoto tavallaan tulkitaan virhetermeille d kirjoitetuksi vhtälöryhmäksi, joka on vektorin d kannalta supistetussa muodossa. Kunkin endogeenisen muuttujan y_i vhtälöön aiatellaan liittyvän additiivisen virhetermin d_i , jonka "sisällöstä" (stokastinen jäännöstermi vai identtisesti nolla) ei tässä vaiheessa olla kiinnostuneita. Kyseessä on itse asiassa pelkkä merkintätämppu, jonka hyöty näkyy lineaarisen version tarkastelun yhteydessä.

Mallin redusoidun muodon (REM) esitys kirjoitetaan vastaavasti

$$(80) \quad y = G(z,d),$$

vrt. kaava (9), ja merkitään

$$(81) \quad G = \begin{pmatrix} g_1 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix}.$$

Suoritetaan nyt joukon N ositus kahteen toisensa poissulkevaan osajoukkoon. Merkitään ositusta

$$(82) \quad (U,V), U \cap V = \emptyset \text{ ja } U \cup V = N.$$

Järjestetään (permutoidaan) ositukseen (U,V) liittyen vektorit F,G,d ja v muotoon

$$\bar{G} = \begin{pmatrix} G_U \\ G_V \end{pmatrix}, \quad \bar{F} = \begin{pmatrix} F_U \\ F_V \end{pmatrix}, \quad \bar{y} = \begin{pmatrix} y_U \\ y_V \end{pmatrix} \quad \text{ja} \quad \bar{d} = \begin{pmatrix} d_U \\ d_V \end{pmatrix},$$

missä $G_U = (g_u)$, $u \in U$ jne.

Jatkossa tullaan tarkastelemaan mallin muotoa, jolla on seuraavanlainen funktionaalinen esitys¹⁾:

$$(83) \quad \begin{cases} d_U = F_U^+(y_U, d_V, z) \\ y_V = G_V^+(y_U, d_V, z) . \end{cases}$$

Tällaista muotoa kutsutaan mallin *osittain redusoiduksi muodoksi* (OREM). Aivan samoin kuin mallin täysin redusoidusta muodosta määrätty ratkaisu

$$\hat{y} = G(d^0, z^0)$$

toteuttaa mallin rakennemuodon yhtälöt, toisin sanoen

$$F(\hat{y}, z^0) = d^0,$$

niin po. ratkaisu toteuttaa myös mallin osittain redusoidujen muotojen yhtälöt eli

$$(84) \quad \begin{cases} d_U^0 = F_U^+(\hat{y}_U, d_V^0, z^0) \\ \hat{y}_V = G_V^+(\hat{y}_U, d_V^0, z^0), \end{cases}$$

kaikilla osituksilla (U,V). Mahdollisten ositusten lukumäärä on 2^n , kun $n = c(N)$ eli yhtälöiden lukumäärä. Erikoistapauksia osittain redusoiduista muodoista ovat osituksiin (\emptyset, N) ja (N, \emptyset) liittyvät mallit, joista edellinen johtaa täysin redusoidun muodon ja jälkimmäinen rakennemuodon esitykseen.

1) Yläindeksin + paikalla käytetään tilanteesta riippuen myös symboleja # ja b.

Jatkossa tarkastellaan ETLAn mallin lineaariseen versioon liittyen kahta kysymystä:

1. Mikä on vektoraalisen funktion $\begin{pmatrix} F_U^+ \\ G_V^+ \end{pmatrix}$ matriisiesitys, kun lähtökohtana ovat matriisit $(\Gamma \ B)$ tai $(C \ D)$?

2. Olkoon (U, V) ja (U', V') kaksi mielivaltaista joukon N ositusta. Miten päästään esityksestä

$$\begin{pmatrix} F_U^+ \\ G_V^+ \end{pmatrix} \text{esitykseen } \begin{pmatrix} F_{U'}^+ \\ G_{V'}^+ \end{pmatrix} \text{matriisien}$$

$(\Gamma \ B)$ tai $(C \ D)$ avulla lausuttuna?

4.2. Merkintöjä

Tarkastellaan lineaarista mallia (1). Liitetään mallin rakennemuotoon kirjanpitoa varten indikaattorimatriisi

$$\psi = [\psi_1 \dots \psi_n],$$

missä n on yhtälöiden ja siis myös endogeenisten muuttujien lukumäärä. Matriisin ψ diagonaalielementin ψ_i , $i \in N$ arvo määräytyy seuraavasti:

$$\psi_i = 1, \text{ kun muuttuja } y_i \text{ ei ole supistettu}$$

ja

$$\psi_i = -1, \text{ kun muuttuja } y_i \text{ on supistettu.}$$

Tällöin mallin RAM on

$$(85) \quad \begin{cases} \psi = I \\ (\Gamma \ B) \begin{pmatrix} y \\ -z \end{pmatrix} = d, \end{cases}$$

ja vastaavasti REM on

$$(86) \quad \begin{cases} \psi = -I \\ (C \ \Pi) \begin{pmatrix} \psi d \\ -z \end{pmatrix} = \psi y. \end{cases}$$

Tarkastellaan edelleen yhtälöiden ja vastaavien endogeenisten muuttujien ositusta

(U,V)

ja suoritetaan tätä ositusta vastaten eräitä permutointeja ja mallin yhtälösystemin ositus.

Otetaan tätä varten käyttöön erityinen permutointioperaatio P.

Tarkastellaan aluksi järjestysnumeroiden transformaatiota

$$\begin{array}{ccccccc} (1 & 2 & 3 & \dots & n) \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow \\ (i_1 & i_2 & i_3 & \dots & i_n) \end{array}$$

eli permutointia, jossa alkuperäisen järjestyksen mukaan 1.

alkio siirtyy sijaluvulle i_1 , 2. alkio sijaluvulle i_2 jne.

Tällaista operaatiota on luontevaa merkitä symbolilla $P_{(i_1 \dots i_n)}$,

jossa siis alaindeksivektori $(i_1 \dots i_n)$ ilmaisee, mistä trans-

formaatiosta on kysymys.

Nyt on tehtävänä kuitenkin järjestää argumenttimatriisin rivit $(u_1 \dots u_{n_U})$ ensimmäisiksi eli paikkoihin $(1 \dots n_U)$ ennen rivejä $(v_1 \dots v_{n_V})$, jotka sijoitetaan paikkoihin $(n_U+1 \dots n_U+n_V)$. Tässä n_U ja n_V viittaavat indeksijoukkojen U ja V elementtien lukumääriin, $n_U+n_V = n$. Tällaista operaatiota voidaan merkitä vastaavasti symbolilla $P_{(u_1 \dots u_{n_U} v_1 \dots v_{n_V})}^{r, -1}$, jossa yläindeksi r viittaa riveihin ja (-1) viittaa operaation "käänteisyyteen". Vastaavaa sarakepermutointia merkitään $P_{(u_1 \dots u_{n_U} v_1 \dots v_{n_V})}^{s, -1}$. Alaindeksivektori voidaan jättää kirjoittamatta silloin kun asiayhteydestä muutenkin selviää, mistä permutoinnista on kysymys.

Näitä merkintöjä käyttäen voidaan kirjoittaa mallin rakenne-
muoto

$$(87) \quad \begin{cases} \bar{\psi} = I \\ (\bar{\Gamma} \quad \bar{B}) \begin{pmatrix} \bar{y} \\ -z \end{pmatrix} = \bar{d}, \end{cases}$$

$$\text{missä} \quad \bar{\Gamma} = P^{r, -1} P^{s, -1} (\Gamma)$$

$$\bar{B} = P^{r, -1} (B)$$

$$\bar{y} = P^{r, -1} (y)$$

$$\bar{d} = P^{r, -1} (d)$$

$$\text{ja} \quad \bar{\psi} = P^{r, -1} P^{s, -1} (\psi)$$

Osittamalla ja kirjoittamalla yhtälösystemin (87) superelementit näkyviin saadaan

$$(88) \quad \begin{cases} \psi_U = I, \psi_V = I \\ \begin{pmatrix} \Gamma_{UU} & \Gamma_{UV} & B_U \\ \Gamma_{VU} & \Gamma_{VV} & B_V \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_U y_U \\ \psi_V y_V \\ -z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_U d_U \\ \psi_V d_V \end{pmatrix}. \end{cases}$$

Superelementit Γ_{UU} ja Γ_{VV} ovat neliömatriiseja, samoin kuin ψ_U ja ψ_V . Yhtälösystemistä (88) päästään haluttaessa takaisin alkuperäiseen yhtälösystemiin soveltamalla käytetyille permutointioperaatioille käänteisiä operaatioita P^r ja P^s .

4.3. Siirtyminen osittain redusoidusta muodosta täysin redusoidun muodon suuntaan: supistusoperaatio S

Tarkastellaan lähtökohtana mallin yhtälöiden ositusta (U,V), $V \neq \emptyset$, vastaavaa järjestettyä yhtälösystemiä (88) eli

$$\begin{cases} \Gamma_{UU}y_U + \Gamma_{UV}y_V - B_Uz = d_U \\ \Gamma_{VU}y_U + \Gamma_{VV}y_V - B_Vz = d_V \end{cases}$$

ja $\psi_U = 1, \psi_V = 1$.

Johdetaan em. lausekkeesta mallin osittain redusoitu muoto supistamalla muuttujat y_V . Tätä varten kerrotaan yhtälösystemin jälkimmäinen yhtälöryhmä matriisin Γ_{VV} inverssillä

$$C_{VV}^{\#} = \Gamma_{VV}^{-1}$$

Järjestelemällä hieman yhtälöryhmän tekijöitä saadaan esitys

$$(89) \quad \begin{cases} \Gamma_{UU}y_U + \Gamma_{UV}y_V - B_Uz = d_U \\ C_{VU}^{\#}y_U + C_{VV}^{\#}d_V + \Pi_V^{\#}z = y_V, \end{cases}$$

missä $(C_{VU}^{\#} \ C_{VV}^{\#} \ \Pi_V^{\#}) = (\Gamma_{VV}^{-1}\Gamma_{VU} \ \Gamma_{VV}^{-1} \ \Gamma_{VV}^{-1}B_V)$.

Sijoittamalla jälkimmäisestä yhtälöryhmästä vektorin y_V lauseke edelliseen yhtälöryhmään saadaan OREM

$$(90) \quad \begin{cases} \psi_U = I, \psi_V = -I \\ \Gamma_{UU}^{\#} y_U - \Gamma_{UV}^{\#} d_V - B_U^{\#} z = d_U \\ -C_{VU}^{\#} y_U + C_{VV}^{\#} d_V + \Pi_V^{\#} z = y_V \end{cases}$$

missä kertoimet lausuttuna RAM-kerrointen avulla ovat

$$(91) \quad \begin{pmatrix} \Gamma_{UU}^{\#} & \Gamma_{UV}^{\#} & B_U^{\#} \\ C_{VU}^{\#} & C_{VV}^{\#} & \Pi_V^{\#} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Gamma_{UU} - \Gamma_{UV} \Gamma_{VV}^{-1} \Gamma_{VU} & -\Gamma_{UV} \Gamma_{VV}^{-1} B_U - \Gamma_{UV} \Gamma_{VV}^{-1} B_V \\ \Gamma_{VV}^{-1} \Gamma_{VU} & \Gamma_{VV}^{-1} & \Gamma_{VV}^{-1} B_V \end{pmatrix}.$$

Alkuperäiseen järjestykseen päästään kohdentamalla kaavan (91) matriisiin operaatiot P^r ja P^s .

Jotta edellä kuvattu muuttujien supistus olisi mahdollista, on oletettava, että ainakin diagonaalinen superelementti Γ_{VV} on säännöllinen matriisi. Kuten huomataan, vastaa esitys (90)-(91) aiemmin esitettyä funktionaalista esitystä (83).

Edellä kuvattiin siirtymistä rakennemuodosta eli mallista

$$\begin{pmatrix} F_N^{\#} \\ G_{\emptyset}^{\#} \end{pmatrix} \text{ malliin } \begin{pmatrix} F_U^{\#} \\ G_V^{\#} \end{pmatrix}.$$

Tarkastellaan seuraavaksi siirtymistä mielivaltaisesta osittain redusoidusta muodosta

$$\begin{pmatrix} F_U^\# \\ G_V^\# \end{pmatrix}$$

"askelta pitemmälle" redusoidun muodon suuntaan eli osittain redusoituun muotoon

$$\begin{pmatrix} F_{U'}^\# \\ G_{V'}^\# \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_{U-\{h\}}^\# \\ G_{V+\{h\}}^\# \end{pmatrix}.$$

Indeksi h viittaa mielivaltaiseen joukon U elementtiin (oletetaan $U \neq \emptyset$).

Esityksen yhtenäistämiseksi kaikkia OREM-kertoimia merkitään symboleilla

$$c_{ij} \text{ ja } \pi_{ik}, \quad i, j \in N, \quad k \in M,$$

sopivilla selvennyksillä varustettuina (esim. ylämerkinnällä: c_{ij}^0). Kunkin kertoimen tulkinta, ts. onko kysymyksessä esim. RAM-kerroin γ_{ij} , käy selville indikaattorimatriisin diagonaali-elementtien ψ_i ja ψ_j arvoista. Erityisesti jos $\psi = I$, kyseessä ovat RAM-kertoimet γ_{ij} , β_{ik} , ja jos $\psi = -I$, kyseessä ovat REM-kertoimet c_{ij} , π_{ik} .

Kirjoitetaan OREM $\begin{pmatrix} F_U^\# \\ G_V^\# \end{pmatrix}$ komponenttiesityksenä seuraavalla tavalla ositettuna:

$$(92) \quad \left\{ \begin{array}{l} \psi_u = 1, \quad u \in U \\ \psi_v = -1, \quad v \in V \\ c_{hh}^0 y_h + \sum_{\substack{j \in U \\ j \neq h}} c_{hj}^0 y_j - \sum_{l \in V} c_{hl}^0 d_l - \sum_{k \in M} \pi_{hk}^0 z_k = d_h, \\ c_{uh}^0 y_h + \sum_{\substack{j \in U \\ j \neq h}} c_{uj}^0 y_j - \sum_{l \in V} c_{ul}^0 d_l - \sum_{k \in M} \pi_{uk}^0 z_k = d_u, \quad u \in U - \{h\} \\ -c_{vh}^0 y_h - \sum_{\substack{j \in U \\ j \neq h}} c_{vj}^0 y_j + \sum_{l \in V} c_{vl}^0 d_l + \sum_{k \in M} \pi_{vk}^0 z_k = y_v, \quad v \in V. \end{array} \right.$$

Ratkaisemalla y_h ensimmäisestä yhtälöstä ja sijoittamalla sen lauseke muihin yhtälöihin saadaan osittain redusoitu muoto

$$\begin{pmatrix} F_{U-\{h\}}^\# \\ G_{V+\{h\}}^\# \end{pmatrix}$$

eli komponenttimuodossa

$$(93) \quad \left\{ \begin{array}{l} \psi_u = 1, \quad u \in U' = U - \{h\} \\ \psi_v = -1, \quad v \in V' = V + \{h\} \\ \sum_{j \in U'} c_{uj}^\# y_j - \sum_{l \in V'} c_{ul}^\# d_l - \sum_{k \in M} \pi_{uk}^\# z_k = d_u, \quad u \in U' \\ - \sum_{j \in U'} c_{vj}^\# y_j + \sum_{l \in V'} c_{vl}^\# d_l + \sum_{k \in M} \pi_{vk}^\# z_k = y_v, \quad v \in V', \end{array} \right.$$

missä, käyttäen indeksimerkintöjä i, j, k

$$(94) \quad \left\{ \begin{array}{l} c_{ij}^{\#} = \begin{cases} 1/c_{hh}^0, & i=j=h \\ c_{hj}^0/c_{hh}^0, & i=h, j \neq h \\ -c_{ih}^0/c_{hh}^0, & i \neq h, j=h \\ c_{ij}^0 - c_{ih}^0 c_{hj}^0/c_{hh}^0, & i \neq h, j \neq h \end{cases} \\ \pi_{ik}^{\#} = \begin{cases} \pi_{hk}^0/c_{hh}^0, & i=h \\ \pi_{ik}^0 - c_{ih}^0 \pi_{hk}^0/c_{hh}^0, & i \neq h. \end{cases} \end{array} \right.$$

ja $i, j \in N, k \in M.$

Määritellään edellisen nojalla *yksittäinen supistusoperaatio* S_h seuraavasti:

Määritelmä 3: Yksittäinen supistusoperaatio $S_h, h \in N.$

Jos $\psi_h = 1$, niin $S_h(C^0 \Pi^0) = (C^{\#} \Pi^{\#})$,
missä kertoimet $(C^{\#} \Pi^{\#})$ ovat kuten kaavassa (94),
ja asetetaan $\psi_h = -1$. Operaatio on määritelty, jos $c_{hh}^0 \neq 0$.

Jos $\psi_h = -1$, niin $S_h(C^0 \Pi^0) = (C^0 \Pi^0)$.

Soveltamalla operaatiota kahdesti, esim. $S_{h_2} S_{h_1}$,
saadaan supistottua muuttujat y_{h_1} ja y_{h_2} . Aiemmin esitelty
muuttujien y_V supistus mallin rakennemuodosta saadaan ai-
kaan operaatioiden tulona

$$\prod_{v \in V} S_v.$$

Erityisesti mallin täysin redusoitu muoto saadaan rakenne-
muodosta lähtien operaatioiden tulona

$$\prod_{i \in N} S_i.$$

Voidaan osoittaa, että operaatioiden suoritusjärjestyksellä
ei ole merkitystä. Määritellään yleinen supistusoperaatio S_V
seuraavasti:

Määritelmä 4: Yleinen supistusoperaatio S_V , $V \subseteq N$.

$$S_V = \prod_{v \in V} S_v,$$

yksittäiset operaatiot suoritettuna missä järjestyksessä
tahansa.

Supistusoperaatiolle S pätee siis

- (i) $S_f S_g = S_g S_f$ (kommutointi)
- (ii) $S_\emptyset(\Gamma B) = (\Gamma B)$
- (iii) $S_N(\Gamma B) = (C \Pi)$
- (iv) Jos $\psi_f = -1$ niin $S_f = I$.

Operaation S_f , $f \in N$ laskennallinen raskaus on jotakuinkin sama kuin R -operaationkin. Säännöllinen $(n \times n)$ -matriisi voidaan invertoida suorittamalla yksittäinen supistusoperaatio n kertaa. Supistusoperaation S avulla ei ole mahdollista siirtyä osittain redusoidusta muodosta mielivaltaiseen toiseen osittain redusoituun muotoon. Esimerkiksi jos muuttujat y_v , $v \in V$, on supistettu, niin S -operaatiota soveltamalla ei päästä sellaisiin mallin muotoihin, joissa jokin y_f , $f \in V$, on supistamatta. Tästä syystä on aiheellista tarkastella seuraavaksi lavennusoperaatiota L .

4.4. Siirtyminen osittain redusoidusta muodosta rakenne- muodon suuntaan: lavennusoperaatio L

Tarkastellaan aluksi siirtymää mallista

$$\begin{pmatrix} F \\ \emptyset \\ G \\ N \end{pmatrix} \text{ malliin } \begin{pmatrix} F \\ U \\ G \\ V \end{pmatrix}$$

liittyen samaan ositukseen (U, V) kuin edellisessäkin kappaleessa.

Permutoidaan REM-yhtälöt

$$\begin{cases} \psi = -I \\ y = \Pi z + Cd \end{cases}$$

muotoon

$$\begin{cases} \bar{\psi} = -I \\ \bar{y} = \bar{C}\bar{d} + \bar{\Pi}\bar{z} \end{cases}$$

vastaavasti kuin edellisessä kappaleessa ja kirjoitetaan yhtälösystemi ositettuna

$$(95) \quad \begin{cases} \psi_U = -I, \psi_V = -I \\ y_U = C_{UU}d_U + C_{UV}d_V + \Pi_U z \\ y_V = C_{VU}d_U + C_{VV}d_V + \Pi_V z. \end{cases}$$

Lavennetaan nyt muuttujat y_U takaisin malliin: ratkaistaan y_U :n yhtälö d_U :n suhteen kertomalla yhtälö vasemmalta inverssillä C_{UU}^{-1} ja sijoitetaan saatava d_U :n lauseke jälkimmäiseen yhtälöryhmään. Tätä kautta saadaan OREM

$$(96) \quad \begin{cases} \Gamma_{UU}^b y_U - \Gamma_{UV}^b d_V - B_U^b z = d_U \\ -C_{VU}^b y_U + C_{VV}^b d_V + \Pi_V^b z = y_V \end{cases}$$

missä kertoimet lausuttuna REM-kerrointen avulla ovat

$$(97) \quad \begin{pmatrix} \Gamma_{UU}^b & \Gamma_{UV}^b & B_U^b \\ C_{VU}^b & C_{VV}^b & \Pi_V^b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{UU}^{-1} & C_{UU}^{-1}C_{UV} & C_{UU}^{-1}\Pi_U \\ -C_{VU}C_{UU}^{-1} & C_{VV} - C_{VU}C_{UU}^{-1}C_{UV} & \Pi_V - C_{VU}C_{UU}^{-1}\Pi_U \end{pmatrix}$$

Kohdentamalla vielä operaatiot P^r ja P^s

edelliseen matriisiin päästään alkuperäiseen esitysjärjestykseen. Ehtona edellä kuvatun laventamisen suorittamiselle on, että diagonaalinen superelementti C_{UU} on säännöllinen matriisi.

Voidaan osoittaa, että redusoidusta muodosta lähtemällä saatava OREM (96) on ekvivalentti samaa ositusta (U,V) vastaavan, rakennemuodosta lähtemällä saadun OREMin (90) kanssa.

Tarkastellaan seuraavaksi siirtymistä osittain redusoidusta $\begin{pmatrix} F_U^b \\ G_V^b \end{pmatrix}$ yhtä lavennusta pidemmälle rakennemuodon suuntaan eli malliin $\begin{pmatrix} F_{U+\{h'\}}^b \\ G_{V-\{h'\}}^b \end{pmatrix}$, $h' \in V$. Kirjoitetaan OREM $\begin{pmatrix} F_U^b \\ G_V^b \end{pmatrix}$ ositettuna komponenttimuotoon

$$(98) \quad \left\{ \begin{array}{l} \psi_u = 1, u \in U \\ \psi_v = -1, v \in V \\ \sum_{j \in U} c_{uj}^0 y_j - c_{uh'}^0 d_{h'} - \sum_{\substack{l \in V \\ l \neq h'}} c_{ul}^0 d_l - \sum_{k \in M} \pi_{uk}^0 z_k = d_u, u \in U \\ - \sum_{j \in U} c_{vj}^0 y_j + c_{vh'}^0 d_{h'} + \sum_{\substack{l \in V \\ l \neq h'}} c_{vl}^0 d_l + \sum_{k \in M} \pi_{vk}^0 z_k = y_v, v \in V - \{h'\} \\ - \sum_{j \in U} c_{h'j}^0 y_j + c_{h'h'}^0 d_{h'} + \sum_{\substack{l \in V \\ l \neq h'}} c_{h'l}^0 d_l + \sum_{k \in M} \pi_{h'k}^0 z_k = y_{h'} \end{array} \right.$$

Ratkaisemalla viimeisestä yhtälöstä $d_{h'}$, ja sijoittamalla sen lauseke muihin yhtälöihin saadaan osittain redusoitu muoto

$$\begin{pmatrix} F_{U+\{h'\}}^b \\ G_{V-\{h'\}}^b \end{pmatrix} \text{ eli komponenttimuodossa}$$

$$(99) \left\{ \begin{array}{l} \psi_u = 1, u \in U'' = U + \{h'\} \\ \psi_v = -1, v \in V'' = V - \{h'\} \\ \sum_{j \in U''} c_{uj}^b y_j - \sum_{l \in V''} c_{ul}^b d_l - \sum_{k \in M} \pi_{uk}^b z_k = d_u, u \in U'' \\ - \sum_{j \in U''} c_{vj}^b y_j + \sum_{l \in V''} c_{vl}^b d_l + \sum_{k \in M} \pi_{vk}^b z_k = y_v, v \in V'' \end{array} \right.$$

missä, käyttäen indeksimerkintöjä i, j, k

$$(100) \left\{ \begin{array}{l} c_{ij}^b = \begin{cases} 1/c_{h'h'}^0, & i=j=h' \\ c_{h'j}^0/c_{h'h'}^0, & i=h', j \neq h' \\ -c_{ih'}^0/c_{h'h'}^0, & i \neq h', j=h' \\ c_{ij}^0 - c_{ih'}^0 c_{h'j}^0/c_{h'h'}^0, & i \neq h', j \neq h' \end{cases} \\ \pi_{ik}^b = \begin{cases} \pi_{h'k}^0/c_{h'h'}^0, & i=h' \\ \pi_{ik}^0 - c_{ih'}^0 \pi_{h'k}^0/c_{h'h'}^0, & i \neq h' \end{cases} \end{array} \right.$$

ja $i, j \in N, k \in M$.

Edellisestä esityksestä nähdään, että lavennusoperaation vaikutus lähtökohtamallin kertoimiin $(C^0 \Pi^0)$ on muodollisesti täysin sama kuin supistusoperaation vaikutus. Erona on vain se, "kumpaan suuntaan" ollaan menossa: yhtälö h voidaan supistaa edellyttäen, että sitä ei vielä ole supistettu, ts. $\psi_h = 1$. Mikäli $\psi_h = -1$, yhtälöä h ei voida supistaa, mutta kylläkin laventaa. Voidaankin sanoa, että laventaminen ja supistaminen ovat ψ_h :n etumerkkiä vaille sama operaatio.

Määritellään edellä esitellyn perusteella yksittäinen lavennusoperaatio $L_{h'}$ seuraavasti:

Määritelmä 5: Yksittäinen lavennusoperaatio $L_{h'}$, $h' \in \mathbb{N}$

Jos $\psi_{h'} = -1$, niin $L_{h'}(C^0 \Pi^0) = (C^b \Pi^b)$, missä kertoimet $(C^b \Pi^b)$ ovat kuten kaavassa (100), ja asetetaan $\psi_{h'} = 1$. Operaatio on määritelty, jos $c_{h'h'}^0 \neq 0$.

Jos $\psi_{h'} = 1$, niin $L_{h'}(C^0 \Pi^0) = (C^0 \Pi^0)$

Soveltamalla operaatiota kahdesti, esim. $L_{h_2} L_{h_1}$, saadaan lavennettua muuttujat y_{h_1} ja y_{h_2} . Aiemmin esitelty muuttujien y_U lavennus mallin redusoidusta muodosta saadaan operaatioiden tulona

$$\prod_{u \in U} L_u.$$

Erityisesti mallin rakennemuoto saadaan redusoidusta muodosta lähtien operaatioiden tulona

$$\prod_{i \in \mathbb{N}} L_i.$$

Voidaan osoittaa, että lavennusoperaatioiden suoritusjärjestyksellä ei ole merkitystä.

Määritellään yleinen lavennusoperaatio L_U seuraavasti:

Määritelmä 6: Yleinen lavennusoperaatio L_U , $U \subset \mathbb{N}$.

$$L_U = \prod_{u \in U} L_u,$$

yksittäiset operaatiot suoritettuna missä järjestyksessä tahansa.

Vastaavasti kuin supistusoperaatiolle pätee lavennusoperaatiolle

- (i) $L_f L_g = L_g L_f$ (kommutointi)
- (ii) $L_\emptyset(C \Pi) = (C \Pi)$
- (iii) $L_N(C \Pi) = (\Gamma B)$
- (iv) Jos $\psi_f = 1$ niin $L_f = I$

Operaation L_f , $f \in \mathbb{N}$ laskennallinen raskaus on tietysti täsmälleen sama kuin S_f :n. Lavennusoperaation avulla on mahdollisuus siirtyä osittain redusoidusta muodosta kohti rakenne-
muotoa. Seuraavassa kappaleessa tarkastellaan tulo-operaatiota $S_V L_{V'}$, $V, V' \subset \mathbb{N}$, jonka avulla on mahdollista siirtyä mielivaltaisesta osittain redusoidusta muodosta toiseen.

4.5. Siirtyminen osittain redusoidusta muodosta toiseen osittain redusoituun muotoon: vaihto-operaatio V

Siirtyminen osittain redusoidusta muodosta toiseen mielivaltaiseen osittain redusoituun muotoon voidaan toteuttaa yhdistämällä sopivasti edellä kuvattuja supistus- ja laven-

nusoperaatioita. Tarkastellaan siirtymistä, jossa lähtökohtana on OREM $(C^0 \Pi^0)$ ja lopputulemana on OREM $(C^+ \Pi^+)$. Vertaillaan näitä kahta muotoa muuttujittain tarkastelemalla indikaattorimatriisien ψ^0 ja ψ^+ diagonaalielementtejä ψ_i^0 ja ψ_i^+ , $i \in \mathbb{N}$. Voidaan erottaa neljä tapausta.

1. $\psi_i^0 = -1$, $\psi_i^+ = -1$, eli kummassakin muodossa muuttuja y_i on supistettu: ei toimenpiteitä muuttujan y_i osalta
2. $\psi_i^0 = -1$, $\psi_i^+ = 1$, eli muodossa $(C^0 \Pi^0)$ muuttuja y_i on supistettu kun taas muodossa $(C^+ \Pi^+)$ se on supistamatta: tarvitaan operaatiota L_i
3. $\psi_i^0 = 1$, $\psi_i^+ = -1$, eli tilanne on päinvastainen kuin tapauksessa 2: tarvitaan operaatiota S_i
4. $\psi_i^0 = 1$, $\psi_i^+ = 1$, eli kummassakin muodossa muuttuja y_i supistamatta: ei toimenpiteitä muuttujan y_i osalta.

Siirtyminen muodosta $(C^0 \Pi^0)$ muotoon $(C^+ \Pi^+)$ voidaan toteuttaa suorittamalla lavennusoperaatiot

$$L_i, \text{ kun } \psi_i^0 = -1 \text{ ja } \psi_i^+ = 1$$

ja supistusoperaatiot

$$S_i, \text{ kun } \psi_i^0 = 1 \text{ ja } \psi_i^+ = -1$$

eli

$$(101) \quad (C^+ \Pi^+) = \prod S_i \prod L_i (C^0 \Pi^0), \quad i \in N.$$

$$\begin{cases} \psi_i^0 = 1 \\ \psi_i^+ = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} \psi_i^0 = -1 \\ \psi_i^+ = 1 \end{cases}$$

Yksittäisten supistus- ja lavennusoperaatioiden muodollinen samankaltaisuus oikeuttaa määrittelemään *yksittäisen vaihto-operaation*, joka tilanteesta riippuen voidaan tulkita joko supistus- tai lavennusoperaatioksi.

Määritelmä 7: Yksittäinen vaihto-operaatio V_h , $h \in N$

$$V_h(C^0 \Pi^0) = (C^+ \Pi^+),$$

missä c_{ij}^+ - ja π_{ik}^+ -kertoimet c_{ij}^0 - ja π_{ik}^0 -kerrointen avulla lausuttuna ovat kuten $c_{ij}^\#$ - ja $\pi_{ik}^\#$ -kertoimet kaavassa (94) tai ekvivalentisti kuten c_{ij}^b - ja π_{ik}^b -kertoimet kaavassa (100). Lisäksi indikaattorielementin ψ_h^0 etumerkki vaihtuu, ts. $\psi_h^+ = -\psi_h^0$.

Operaatio V_h on siis tulkittavissa S_h -operaatioksi, jos $\psi_h^0 = 1$, ja L_h -operaatioksi, jos $\psi_h^0 = -1$. Vaihto-operaatio V_h muuntaa OREM-kertoimet muotoon, joka vastaa yhtälösystemiä, jossa d_h -termi ja muuttuja y_h ovat "vaihtaneet paikkaa" (sekä etumerkkiä) alkutilanteeseen nähden, vrt. esim. kaavat (92)-(94).

Yksittäistä vaihto-operaatiota on tarkasteltu mm. askeltavan regressioanalyysin (Väliaho 1969) ja lineaarisen ohjelmoinnin (Väliaho 1970) yhteydessä. Myös

Dempsterin (1969) käyttämä "Sweep"-operaatio on oleellisesti - etumerkkejä vaille - sama kuin tämän kirjoituksen V_h -operaatio.

Yksittäisen vaihto-operaation perusteella voidaan määritellä yleinen vaihto-operaatio.

Määritelmä 8: Yleinen vaihto-operaatio V_H , $H \subset N$.

$$V_H = \prod_{h \in H} V_h,$$

yksittäiset operaatiot suoritettuna missä järjestyksessä tahansa.

Vaihto-operaatiolla on ominaisuudet

- (i) $V_H V_K = V_K V_H$ (kommutointi)
- (ii) $V_H V_H = I$ (involutoorisuus).

Yksittäinen vaihto-operaatio V_h voidaan tulkita yleisen epäkeskisen vaihto-operaation diagonaaliseksi erikoistapaukseksi. *Epäkeskinen vaihto-operaatio* (non-diagonal pivotal operation) V_{hk} kohdistettuna mielivaltaiseen matriisiin Γ määritellään (ks. Väliäho, 1970)

$$\Gamma^+ = V_{hk}(\Gamma), \text{ missä}$$

$$(102) \quad \left\{ \begin{array}{l} \gamma_{hk}^+ = \frac{1}{\gamma_{hk}} \\ \gamma_{ik}^+ = -\frac{\gamma_{ik}}{\gamma_{hk}}, \quad i \neq h \\ \gamma_{hj}^+ = \frac{\gamma_{hj}}{\gamma_{hk}}, \quad j \neq k \\ \gamma_{ij}^+ = \gamma_{ij} - \frac{\gamma_{ik} \gamma_{hj}}{\gamma_{hk}}, \quad i \neq h, j \neq k, \end{array} \right.$$

edellyttäen, että $\gamma_{hk} \neq 0$.

Operaatio V_{hk} , jota jatkossa kutsutaan myös *pivotointioperaatioksi*, muuttaa indikaattorimatriisin ψ elementtejä siten, että

$$\left\{ \begin{array}{l} \psi_r^+ = -\psi_s^0 \\ \psi_s^+ = -\psi_r^0 \end{array} \right.$$

Tuore esitys pivotointioperaatiosta sisältyy teokseen Väliäho (1981), joskin on huomattava, että po. viitteessä operaation määrittely poikkeaa etumerkkien valinnan osalta kirjoittajan aikaisemmasta käytännöstä.

Operaatiolle V_{hk} pätee mm. (ks. Väliaho, 1970)

$$(i) \quad V_{hk}V_{mn} = V_{mn}V_{hk}, \text{ kun } h \neq m \text{ ja } k \neq n \text{ (kommutointi)}$$

$$(ii)^{1)} \quad V_{jk}V_{ik} = P_{ij}^R V_{jk}$$

$$(iii) \quad V_{hk}V_{hk} = I \quad (\text{involutoorisuus}).$$

Edelleen voidaan helposti osoittaa, että mikäli Γ on säännöllinen neliömatriisi, operaation V_{hk} tuottama matriisi Γ^+ on myös säännöllinen (vrt. apulause sivulla 40).

1) Merkintä P_{ij}^R , jossa on kaksi alaindeksiä ilman sulkumerkkejä, tarkoittaa permutointia, jossa alkuperäisen järjestyksen $i.$ ja $j.$ rivi vaihtavat paikkoja. Merkintä P_{ij}^S tarkoittaa vastaavaa sarakepermutointia.

5. USEAN PARAMETRIMUUTOKSEN VAIKUTUKSISTA

Mallin osittain redusoituihin muotoihin liittyvää välineistöä voidaan käyttää hyväksi tarkasteltaessa monimutkaisempia rakennemuodon muutoksia kuin edellä käsiteltyjä yksittäisiä parametrimuutoksia. Tämän luvun aluksi pyritään motivoimaan jatkossa sovellettavaa hieman epäsovinnaista tapaa tulkita endogeeniset muuttujat eksogeenisiksi tai päinvastoin tarpeen niin vaatiessa. Seuraavaksi esitellään jatkossa tarvittavat kaksi uutta operaatiota, $K_{rs}^{(\epsilon)}$ ja $T_{sr}^{(\epsilon)}$, sekä esitetään eri operaatioiden väliset relaatiot ja yhdistelysäännöt.

Kehitelyä välineistöä sovelletaan sitten tapaukseen, jossa useat kerroinelementit γ_{ij} muuttuvat samanaikaisesti. Sen jälkeen tarkastellaan yhden yhtälön muuttumisen tärkeitä erikoistapauksia, endogeenisen muuttujan eksogenisointia ja eksogeenisen muuttujan endogenisointia. Luvun lopuksi tarkastellaan esimerkkinä ETLAn kokonaistaloudellisella mallilla tehtyjä herkkyyksianalyysikokeita sekä hahmotellaan eräitä jatkotutkimusasetelmia.

5.1. REM-kertoimien tulkinta OREM-kertoimina

Tarkastellaan lineaarisen mallin rakennemuotoa (85) eli

$$\begin{cases} \psi = I \\ (\Gamma \ B) \begin{pmatrix} y \\ -z \end{pmatrix} = d. \end{cases}$$

Mallia voidaan "laajentaa" kuvaamalla eksplisiittisesti, miten mallin ennaltamäärätyille muuttujille z_k , $k \in M$, tulevat arvot generoidaan varsinaisen mallin ulkopuolella. Kirjoitetaan muuttujille z_k yhtälöt

$$(103) \quad \begin{cases} z_1 = z_1^0 \\ \vdots \\ z_m = z_m^0 \end{cases}$$

ja liitetään ne rakenteeseen (85). Ennaltamäärättyjen muuttujien yhtälöt (103) ovat pelkkiä lukuarvojen asetuskaavoja; esim. ennustetilanteessa kysymys on muuttujan arvon kiinnittämisestä ennustearvoonsa (aidot eksogeeniset muuttujat) tai jonkin aikaisemman jakson toteutuneeseen, ennustettuun tai mallin ratkaisemaan arvoon (viivästetyt muuttujat).

Laajennettu rakenne on muotoa

$$(104) \quad \begin{cases} \psi_N = I, \psi_M = I \\ \begin{pmatrix} \Gamma & B \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ -z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ -z^0 \end{pmatrix}, \end{cases}$$

missä ψ_N on alkuperäisten endogeenisten muuttujien ja ψ_M ennaltamäärättyjen muuttujien indikaattorimatriisi, ja ennaltamäärätyille muuttujille sijoitettavat arvot on kerätty vektoriin z^0 .

Kohdistetaan nyt yhtälösystemiin (104) operaatio S_N eli supistetaan muuttujat y_i , $i \in N$. Tällöin saadaan esitys

$$(105) \quad \begin{cases} \psi_N = -I, \psi_M = I \\ \begin{pmatrix} C & \Pi \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_N^d \\ -z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_N^y \\ -z \end{pmatrix} \end{cases}.$$

Saatu laajennetun yhtälösystemin OREM on aivan sama kuin alkuperäisen systeemin REM, täydennettynä huomautuksella (103). Tässä mielessä täysin redusoidun muodon kertoimet (C ja Π) voidaan tulkita erään laajemman yhtälösystemin osittain redusoidun muodon kertoimiksi.

Laajennetun yhtälösystemin (104) REM saadaan haluttaessa soveltamalla yhtälösystemiin (105) operaatio S_M , jolloin saadaan

$$(106) \quad \begin{cases} \psi_N = -I, \psi_M = -I \\ \begin{pmatrix} C & -\Pi \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_N^d \\ -\psi_M^z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi_N^y \\ -\psi_M^z \end{pmatrix} \end{cases}.$$

Muodolla (106) ei ole mitään sisällöllistä eroa muotoon (105) verrattuna, vaikka kirjoitustavasta johtuen matriisin Π etumerkki onkin vaihtunut. Oleellista on muodon (105) vihjaama

mahdollisuus tulkita REM-kertoimet tarpeen vaatiessa eräiksi OREM-kertoimiksi (sen lisäksi, että RAM ja REM muutenkin on edellä nähty OREMin reunatapauksina).

5.2. Esitettyjen operaatioiden väliset yhteydet

Edellisissä luvuissa on määritelty operaatiot R , U , S , L ja V , minkä lisäksi on käytetty hyväksi eräitä permutointi-, deletointi- ym. operaatioita. Jatkoa ajatellen määritellään tässä vielä kaksi uutta operaatiota, \bar{K} ja T .

Otetaan käyttöön *yksittäinen korjausoperaatio* K merkintöjen yksinkertaistamiseksi.

Määritelmä 9. Yksittäinen korjausoperaatio K , esimerkiksi $K_{rs}^{(\epsilon)}$, $r, s \in N$ tai $K_{uv}^{(\kappa)}$, $u \in N$, $v \in M$:

$$(107) \quad \left\{ \begin{array}{l} K_{rs}^{(\epsilon)}(\Gamma B) = (\Gamma^* B), \text{ missä} \\ \Gamma^* = \Gamma + \epsilon E_{rs}, \quad r, s \in N \\ K_{uv}^{(\kappa)}(\Gamma B) = (\Gamma B^*), \text{ missä} \\ B^* = B + \kappa E_{uv}, \quad u \in N, v \in M \end{array} \right.$$

Operaatio K on siis vain tapa merkitä argumenttimatriisin yhden elementin muutosta.

Toisena uutena operaationa otetaan käyttöön argumenttimatriisin rivien lineaarikombinaatioita muodostava operaatio T .

Määritelmä 10. Operaatio $T_{sr}^{(\epsilon)}$, $r, s \in N$.

$$(108) \quad \left\{ \begin{array}{l} T_{sr}^{(\epsilon)}(C \Pi \hat{y}) = (C^* \Pi^* y^*), \text{ missä} \\ c_{rj}^* = c_{rj} + \epsilon c_{sj}, \quad c_{ij}^* = c_{ij}, \quad i \neq r \\ \pi_{rk}^* = \pi_{rk} + \epsilon \pi_{sk}, \quad \pi_{ik}^* = \pi_{ik}, \quad i \neq r \\ y_r^* = y_r + \epsilon y_s, \quad y_i^* = y_i, \quad i \neq r \end{array} \right.$$

Argumenttimatriiseina C ja Π voivat olla mielivaltaiset OREM-matriisit C^0 ja Π^0 . Operaatio T_{sr} muistuttaa kovasti U -operaatiota; oleellisena erona on se, että T_{sr} muodostaa riville r rivien r ja s lineaarikombinaation, kun taas U_{uv} muodostaa sarakkeelle v sarakkeiden u ja v lineaarikombinaation.

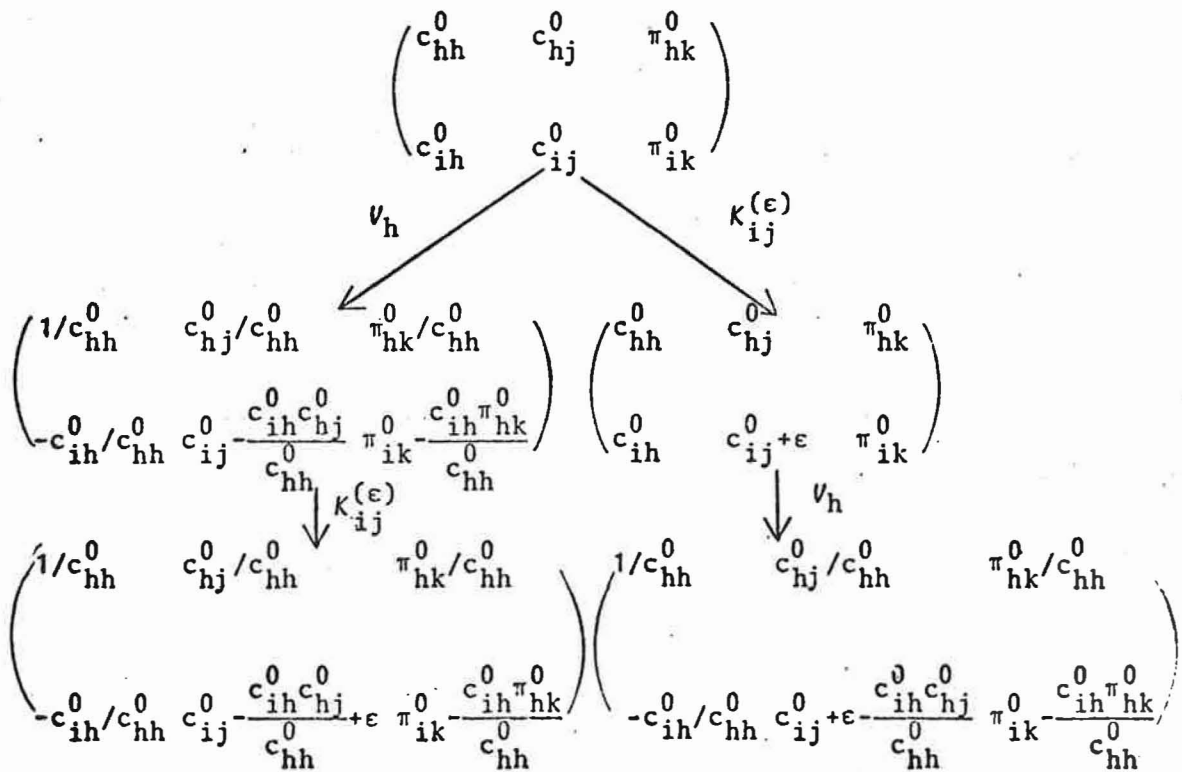
Aikaisemmin on jo todettu involutoorisuus- ja kommutointiominaisuudet erikseen operaatioille R , U ja V (eli L tai S , tilanteen mukaan). Vastaavat ominaisuudet voidaan osoittaa todeksi myös operaatioille K ja T . Lisäksi edellä on todettu, että $RU = UR$, eli että operaatiot R ja U kommutoivat.

Esitetään seuraavaksi yhdistelysäännöt vaihto-operaatiolle V ja korjausoperaatiolle K .

Lause 2: Operaatioille V ja K pätee

$$(109) \quad v_h K_{rs}^{(\epsilon)} = \begin{cases} u_{rs}^{(\epsilon)} v_h, & \text{jos } h = r \neq s \\ \tau_{sr}^{(-\epsilon)} v_h, & \text{jos } h = s \neq r \\ K_{rs}^{(\epsilon)} v_h, & \text{jos } h \neq r, s \end{cases}$$

Todistus. Tarkastellaan ensin tapausta $h \neq r, s$. Todistus voidaan suorittaa kaaviotarkastelun avulla seuraamalla samasta alkutilanteesta lähtien kahta eri reittiä ja toteamalla, että ne johtavat samaan lopputulokseen. Lavennettava/supistettava muuttuja olkoon siis y_h ja tarkastellaan erikseen OREM-kertoimia $c_{hh}^0, c_{hj}^0, \pi_{hk}^0, c_{ih}^0$ sekä kertoimia $c_{ij}^0, \pi_{ik}^0, i, j, k \neq h$.



Huomataan, että sekä operaatiotulo $K_{ij}^{(\epsilon)} v_h$ että operaatiotulo $v_h K_{ij}^{(\epsilon)}$ tuottavat samat OREM-kertoimet, kun $h \neq i, j$. Edellä

on käsitelty tapausta $j \in N$. Aivan vastaavalla tavalla voidaan kommutoinnin paikkansapitävyys osoittaa tapauksessa $j \in M$.

Seuraavaksi tarkastellaan tapausta $h = s$ vastaavanlaista kaavioesitystä hyväksikäyttäen. Tarkasteltavat OREM-kertoimet ovat $c_{ss}^0, c_{sj}^0, \pi_{sk}^0, c_{is}^0$ sekä $c_{ij}^0, \pi_{ik}^0, i, j, k \neq s$.

$$\begin{array}{ccc}
 & \begin{pmatrix} c_{ss}^0 & c_{sj}^0 & \pi_{sk}^0 \\ c_{is}^0 & c_{ij}^0 & \pi_{ik}^0 \end{pmatrix} & \\
 \swarrow & & \searrow \\
 K_{is}^{(\epsilon)} & & v_s \\
 \begin{pmatrix} c_{ss}^0 & c_{sj}^0 & \pi_{sk}^0 \\ c_{is+\epsilon}^0 & c_{ij}^0 & \pi_{ik}^0 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 1/c_{ss}^0 & c_{sj}^0/c_{ss}^0 & \pi_{sk}^0/c_{ss}^0 \\ -c_{is}^0/c_{ss}^0 & c_{ij}^0 - \frac{c_{is}^0 c_{sj}^0}{c_{ss}^0} & \pi_{ik}^0 - \frac{c_{is}^0 \pi_{sk}^0}{c_{ss}^0} \end{pmatrix} \\
 \downarrow v_s & & \downarrow T_{si}^{(-\epsilon)} \\
 \begin{pmatrix} 1/c_{ss}^0 & c_{sj}^0/c_{ss}^0 & \pi_{sk}^0/c_{ss}^0 \\ -\frac{c_{is+\epsilon}^0}{c_{ss}^0} & c_{ij}^0 - \frac{(c_{is+\epsilon}^0)c_{sj}^0}{c_{ss}^0} & \pi_{ik}^0 - \frac{(c_{is+\epsilon}^0)\pi_{sk}^0}{c_{ss}^0} \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 1/c_{ss}^0 & c_{sj}^0/c_{ss}^0 & \pi_{sk}^0/c_{ss}^0 \\ -\frac{c_{is}^0}{c_{ss}^0} - \frac{1}{c_{ss}^0}\epsilon & c_{ij}^0 - \frac{c_{is}^0 c_{sj}^0}{c_{ss}^0} - \frac{c_{sj}^0}{c_{ss}^0}\epsilon & \pi_{ik}^0 - \frac{c_{is}^0 \pi_{sk}^0}{c_{ss}^0} - \frac{\pi_{sk}^0}{c_{ss}^0}\epsilon \end{pmatrix}
 \end{array}$$

Saadut OREM-kertoimet ovat jälleen samat, toisin sanoen

$$v_s K_{rs}^{(\epsilon)} = T_{sr}^{(-\epsilon)} v_s, \quad r \neq s.$$

Kolmannen tapauksen ($h = r$) käsittelyä ennen on operaation $u_{uv}^{(\kappa)}$ vaikutusaluetta laajennettava; operaatio esiteltiin alunperin β_{uv} -kertoimen muutoksen yhteydessä, jolloin luonnollisestikin oletettiin, että $v \in M$. Operaation $u_{uv}^{(\kappa)}$ olennaisena toimintona on lisätä argumenttimatriisin sarakkeelle v sarake

u kerrottuna vakiolla κ ; muodollisesti ei ole mitään estettä sille, että voisi olla myös $v \in N$. Oletetaankin tästä lähtien U -operaation yhteydessä yleisemmin kuin aikaisemmin, että $v \in \text{NUM}$.

Kaaviotarkastelu näyttää nyt seuraavalta

$$\begin{array}{ccc}
 & \begin{pmatrix} c_{rr}^0 & c_{rj}^0 & \pi_{rk}^0 \\ c_{ir}^0 & c_{ij}^0 & \pi_{ik}^0 \end{pmatrix} & \\
 & \swarrow K_{rj}^{(\varepsilon)} & \searrow v_r \\
 \begin{pmatrix} c_{rr}^0 & c_{rj}^0 + \varepsilon & \pi_{rk}^0 \\ c_{ir}^0 & c_{ij}^0 & \pi_{ik}^0 \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 1/c_{rr}^0 & c_{rj}^0/c_{rr}^0 & \pi_{rk}^0/c_{rr}^0 \\ -c_{ir}^0/c_{rr}^0 & c_{ij}^0 - \frac{c_{ir}^0 c_{rj}^0}{c_{rr}^0} & \pi_{ik}^0 - \frac{c_{ir}^0 \pi_{rk}^0}{c_{rr}^0} \end{pmatrix} \\
 \downarrow v_r & & \downarrow u_{rj}^{(\varepsilon)} \\
 \begin{pmatrix} 1/c_{rr}^0 & c_{rj}^0/c_{rr}^0 + \varepsilon/c_{rr}^0 & \pi_{rk}^0/c_{rr}^0 \\ -c_{ir}^0/c_{rr}^0 & c_{ij}^0 - \frac{c_{ir}^0 c_{rj}^0}{c_{rr}^0} - \frac{c_{ir}^0 \varepsilon}{c_{rr}^0} & \pi_{ik}^0 - \frac{c_{ir}^0 \pi_{rk}^0}{c_{rr}^0} \end{pmatrix} & & \begin{pmatrix} 1/c_{rr}^0 & c_{rj}^0/c_{rr}^0 + \varepsilon/c_{rr}^0 & \pi_{rk}^0/c_{rr}^0 \\ -c_{ir}^0/c_{rr}^0 & c_{ij}^0 - \frac{c_{ir}^0 c_{rj}^0}{c_{rr}^0} - \frac{c_{ir}^0 \varepsilon}{c_{rr}^0} & \pi_{ik}^0 - \frac{c_{ir}^0 \pi_{rk}^0}{c_{rr}^0} \end{pmatrix}
 \end{array}$$

Kumpikin reitti johtaa jälleen samaan lopputulokseen, toisinaan sanoen

$$v_r K_{rs} = u_{rs} v_r, \quad r \neq s. \quad \square$$

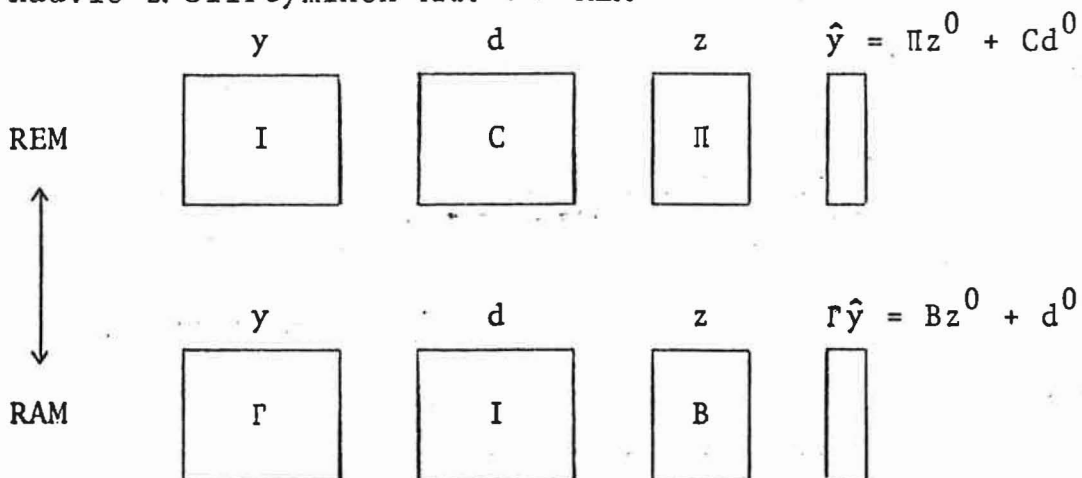
Vaihto-operaatioon liittyvissä tarkasteluissa ei ole pidetty mukana perusratkaisuvektoria \hat{y} , vaan argumentteina ovat olleet ainoastaan matriisit C^0 ja Π^0 . Tätä käytäntöä sovelle-

taan selvyyden vuoksi myös seuraavissa operaatiotulojen sieventämistarkasteluissa. Laskuesimerkeissä perusratkaisuvektoria kuitenkin kuljetetaan koko ajan mukana ikään kuin se olisi Π^0 -matriisin sarake. Määritellään toisin sanoen¹⁾

$$(110) \quad \left\{ \begin{array}{l} v_h(y^0) = (y^+), \\ \text{missä} \\ y_i^+ = \begin{cases} y_h^0/c_{hh}^0, & i = h \\ y_i^0 - c_{ih}^0 y_h^0/c_{hh}^0, & i \neq h. \end{cases} \end{array} \right.$$

Ainoa ongelma on siinä, että OREM-muotoihin liittyvät y^+ -vektorit ovat hieman hankalia tulkita lukuunottamatta rajatapauksia REM ja RAM. Asiaa voidaan havainnollistaa kaavion avulla, jossa toisessa päässä on puhdas REM-asetelma ja toisessa päässä puhdas RAM-asetelma.

Kaavio 2: Siirtyminen $RAM \leftrightarrow REM$



1) Symbolia y^+ käytettiin kappaleessa 3.4. toisessa merkityksessä. Sekaannuksen vaaraa ei kuitenkaan liene.

Esimerkiksi siirtyminen REM \rightarrow RAM merkitsee operaatiota $L_N(C \Pi) = (\Gamma B)$ tai toisin sanoen systeemin kertomista matriisilla Γ sekä "muuttujavaihdosta" $y \leftrightarrow d$. Vektorin y^+ arvoksi tulee tässä operaatiossa $\Gamma \hat{y} = Bz^0 + d^0$ eli yhtälösystemin "eksogeeniselle osalle" valinnoilla z^0 ja d^0 kiinnitetyvä arvo.

Mielivaltaisen OREM-vektorin y^+ tulkinta ei ole aivan yhtä selvä asia. Tarkastellaan esimerkkinä REM-ositusta (95) eli

$$\begin{pmatrix} C_{UU} & C_{UV} \\ C_{VU} & C_{VV} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_U \\ d_V \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Pi_U \\ \Pi_V \end{pmatrix} z = \begin{pmatrix} y_U \\ y_V \end{pmatrix},$$

jossa siis C_{UU} ja C_{VV} ovat neliömatriiseja. Lavennetaan muuttujat y_U suorittamalla operaatio $L_U(C \Pi \hat{y})$, kun \hat{y} on jotakin valintaa z^0 ja d^0 vastaava perusratkaisu. OREM-kertoimet C^+ ja Π^+ ovat nyt samat kuin esityksessä (97), ja y^+ -vektoriksi saadaan

$$(111) \quad y^+ = \begin{pmatrix} y_1^+ \\ y_2^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_{UU}^{-1} \hat{y}_U \\ \hat{y}_V - C_{UV} C_{UU}^{-1} \hat{y}_U \end{pmatrix}.$$

Käytännössä y^+ :n tulkintavaikkeudet eivät aiheuta ongelmia. Jatkossa on taktiikkana useimmiten lähteä liikkeelle REMista, siirtyä sitten johonkin sopivaan OREMiin, tehdä siellä eräitä yksinkertaisia korjauksia ja palata lopulta takaisin REMiin. Mikäli ratkaisuvektoria manipuloidaan korrektisti mukana kaikissa vaiheissa, on sen lopputulemana oikein korjattu ratkaisuvektori, jonka tulkinnassa ei ole mitään huolia.

Edellä esitettyä "operaatiokalkyyliä" hyväksikäyttäen voidaan helposti johtaa uusia mielenkiintoisia operaatioiden välisiä relaatioita. Esimerkiksi lähtien operaation R määritelmästä voidaan kirjoittaa

$$\begin{aligned}
 R_{rs}^{(\epsilon)}(C \Pi) &= \prod_{i \in N} S_i K_{rs}^{(\epsilon)}(\Gamma B) = \prod_{i \in N} S_i K_{rs}^{(\epsilon)} \prod_{i \in N} L_i(C \Pi) \\
 &= S_r S_s \prod_{i \neq r, s} S_i \prod_{i \neq r, s} L_i K_{rs}^{(\epsilon)} L_r L_s(C \Pi) \\
 &= S_s S_r K_{rs}^{(\epsilon)} L_r L_s(C \Pi) \\
 &= S_s U_{rs}^{(\epsilon)} S_r L_r L_s(C \Pi) \\
 &= S_s U_{rs}^{(\epsilon)} L_s(C \Pi)
 \end{aligned}$$

eli

$$(112) \quad R_{rs} = S_s U_{rs} L_s$$

Toista kautta johdetaan tulokseen

$$\begin{aligned}
 R_{rs}^{(\epsilon)}(C \Pi) &= \prod_{i \in N} S_i K_{rs}^{(\epsilon)} \prod_{i \in N} L_i(C \Pi) \\
 &= S_r S_s K_{rs}^{(\epsilon)} \prod_{i \neq r, s} S_i \prod_{i \neq r, s} L_i L_r L_s(C \Pi) \\
 &= S_r S_s K_{rs}^{(\epsilon)} L_s L_r(C \Pi) \\
 &= S_r T_{sr}^{(-\epsilon)} S_s L_s L_r(C \Pi) \\
 &= S_r T_{sr}^{(-\epsilon)} L_r(C \Pi)
 \end{aligned}$$

eli

$$(113) \quad R_{rs}^{(\varepsilon)} = S_r T_{sr}^{(-\varepsilon)} L_r$$

Kaavat (112) ja (113) osoittavat, miten R -operaatio voidaan rakentaa kahdesta vaihto-operaatiosta ja yhdestä lineaarikombinaation muodostavasta operaatiosta (U tai T). U -operaatiolle voidaan myös kehittää samansuuntainen lauseke:

$$\begin{aligned} U_{uv}^{(\kappa)}(C \Pi) &= \prod_{i \in N} S_i K_{uv}^{(\kappa)} \prod_{i \in N} L_i(C \Pi) \\ &= S_u \prod_{i \neq u} S_i \prod_{i \neq u} L_i K_{uv}^{(\kappa)} L_u(C \Pi) \\ &= S_u K_{uv}^{(\kappa)} L_u(C \Pi) \end{aligned}$$

eli

$$(114) \quad U_{uv} = S_u K_{uv} L_u, \quad v \in M.$$

Kaavan (114) mukaisesti U -operaatio voidaan koostaa kahdesta vaihto-operaatiosta ja yksinkertaisesta korjausoperaatiosta (K).

Operaatiolla R ja U on itse asiassa varsin läheinen yhteys: tarkastellaan uudelleen asetelmia (104) ja (106). Laajennetun systeemin RAM oli

$$\begin{pmatrix} \Gamma & B \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y \\ -z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d \\ -z \end{pmatrix},$$

ja merkitään sen kerroinmatriisia

$$\begin{pmatrix} \Gamma & B \\ 0 & I \end{pmatrix} = F = \begin{pmatrix} F_{11} & F_{12} \\ F_{21} & F_{22} \end{pmatrix} = (f_{ij})$$

Kirjoitetaan laajennetun systeemin REM vastaavasti

$$\begin{pmatrix} C & -\Pi \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d \\ -z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ -z \end{pmatrix}$$

ja merkitään sen kerroinmatriisia

$$\begin{pmatrix} C & -\Pi \\ 0 & I \end{pmatrix} = F^{-1} = G = \begin{pmatrix} G_{11} & G_{12} \\ G_{21} & G_{22} \end{pmatrix} = (g_{ij})$$

Muutetaan nyt RAM-matriisissa F yhtä elementtiä f_{rs} siten, että elementin uusi arvo on $f_{rs}^* = f_{rs} + \epsilon$. Aikaisempien tulosten nojalla uudeksi REM-matriisiksi G^* tulee

$$G^* = (g_{ij}^*), \text{ missä}$$

$$\begin{aligned} g_{ij}^* &= g_{ij} - \frac{g_{ir} g_{sj}}{1/\epsilon + g_{sr}} \\ &= g_{ij} - g_{ir} g_{sj} \tau_{rs} \end{aligned}$$

Mikäli f_{rs} on matriisin F_{11} elementti eli alkuperäisen luokituksen mukaan endogeenisen selittäjän kerroin, kyseessä on tavanomainen R -operaatio. Jos taas f_{rs} on matriisin F_{12} element-

ti, eli alkuperäisen luokituksen mukaan eksogeenisen selittäjän kerroin, $g_{sr} = 0$ ja $g_{sj} = 0$, jos $j \neq s$, jolloin edellinen esitys yksinkertaistuu muotoon

$$(115) \quad g_{ij}^* = g_{ij} - g_{ir}g_{sj}^\varepsilon$$

$$= \begin{cases} g_{ij}, & j \neq s \\ g_{is} - \varepsilon g_{ir}, & j = s. \end{cases}$$

Merkitään laajennetun systeemin perusratkaisua

$$\hat{Y} = \begin{pmatrix} \hat{y} \\ -\hat{z} \end{pmatrix}$$

Elementin f_{rs} muutos aiheuttaa perusratkaisun muutoksen siten kuin kappaleessa 3.3 on esitetty; mikäli f_{rs} on matriisin F_{12} elementti, uudeksi ratkaisuksi saadaan

$$(116) \quad Y_i^* = \hat{Y}_i - g_{ir}\hat{Y}_s\varepsilon, \quad i \in \text{NUM}.$$

Edelliset G^* :n ja Y^* :n lausekkeet osoittavat, että $R_{rs}^{(\varepsilon)}$ -operaatio on itse asiassa yksinkertaistunut $U_{rs}^{(-\varepsilon)}$ -operaatioksi, kun ε -muutos on kohdennettu alkuperäisen jaottelun mielessä eksogeenisen selittäjän kertoimeen f_{rs} . Tässä mielessä voidaan sanoa, että U -operaatio on R -operaation erikoistapaus.

Huomautettakoon vielä tarkennuksena, että ratkaisuvektoria \hat{y} on kohdeltava U -operaatiossa toisin kuin kaavassa (73) silloin,

kun κ_{uv} -muutos kohdistuu endogeenisen muuttujan kertoimeen. Endogeeniseksi muuttujaksi on tulkittava kaikki ne muuttujat, joille tarkasteltavassa yhtälösystemissä (alkuperäisessä tai laajennetussa) on kirjoitettu oma yhtälö (vaikkapa vain $y_w = y_w^0$ kuten alunperin eksogeeniseksi ajatellun muuttujan tapauksessa). Vektoria \hat{y} ei tässä tapauksessa tarvitse eikä saakaan muuntaa erillisen säännön mukaisesti kuten eksogeenisen kerroinelementin muutoksen tapauksessa (kaava (73)), koska ratkaisuvektori transformoituu nyt muutenkin oikealla tavalla, esim. Π -matriisin sarakkeeksi tulkittuna toimenpidekokonaisuudessa $R_{rs} = S_s U_{rs} L_s$. Mikäli sen sijaan kysymys on eksogeenisen muuttujan, so. muuttujan, jolle tarkasteltavassa systemissä ei ole omaa yhtälöä, kertoimen muutoksesta, on \hat{y} -vektorin erilliskohtelu aina muistettava suorittaa.

Esitetään vielä muutama esimerkki operaatioiden yhdistelysääntöjen soveltamisesta. Tärkeitä erikoistapauksia usean γ_{ij} -elementin samanaikaisesta muuttumisesta ovat ne, joissa muutokset kohdentuvat samaan riviin tai samaan sarakkeeseen. Tarkastellaan tapausta, jossa Γ -matriisia rivillä r eräät (tai kaikki) kertoimet γ_{rj} muuttuvat siten, että $\gamma_{rj}^* = \gamma_{rj} + \epsilon_{rj}$. Olkoon J_r indeksijoukko, joka ilmoittaa, mitkä kertoimet γ_{rj} muuttuvat, toisin sanoen $j \in J_r$, ja merkitään kertoimen γ_{rj} muutosta ϵ_j :lla, $j \in J_r$. Nyt voidaan kirjoittaa

$$\begin{aligned}
 (117) \quad \prod_{j \in J_r} R_{rj}^{(\epsilon_j)} (C \Pi) &= \prod_{j \in J_r} [S_r T_{jr}^{(-\epsilon_j)} L_r] (C \Pi) \\
 &= S_r \left[\prod_{j \in J_r} T_{jr}^{(-\epsilon_j)} \right] L_r (C \Pi)
 \end{aligned}$$

Toisin sanoen, sen sijaan että suoritettaisiin peräkkäin $c(J_r)$ kertaa R -operaatio, voidaan samaan tulokseen päästä suorittamalla T -operaatio $c(J_r)$ kertaa sekä kaksi vaihto-operaatiota.

Samantyyppinen tulos voidaan johtaa sille tapaukselle, jossa jotkin Γ -matriisin elementit muuttuvat tietyllä sarakkeella s . Olkoon J_s indeksijoukko, joka ilmoittaa, mitkä kertoimet γ_{is} , $i \in J_s$, muuttuvat. Vastaavasti kuin edellä nyt voidaan kehittää esitys

$$(118) \quad \prod_{i \in J_s} R_{is} (C \Pi) = S_s \left[\prod_{i \in J_s} u_{is}^{(\epsilon_i)} \right] L_s (C \Pi)$$

Tuloksia (117) ja (118) voidaan edelleen yksinkertaistaa.

Laajennetaan tätä varten tarkasteltavaa mallikaaviota lisäämällä siihen nollista koostuva rivi, jonka järjestysnumero on nolla. Tarkasteltava asetelma on nyt

$$(119) \quad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ C & \Pi & \hat{y} \end{pmatrix}$$

Kohdentamalla kaavioon (119) operaatio $K_{0r}^{(-1)}$, toisin sanoen korjaamalla sen nollannen rivin alkio r miinus ykköseksi, saadaan kaavio, jota voidaan pitää eräänä osittain redusoituna muotona. Voidaan osoittaa (ks. liite 2), että nyt pätee

$$(120) \quad \prod_{j \in J_r} R_{rj}^{(\epsilon_j)} (C \Pi \hat{y}) = D_{0r}^r V_{0r} \prod_{j \in J_r} T_{j0}^{(-\epsilon_j)} K_{0r}^{(-1)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ C & \Pi & \hat{y} \end{pmatrix}$$

missä V_{0r} on pivotointioperaatio (ks. sivu 86) ja D_0^r on rivin deletointioperaatio. Esityksen (120) etu kavaan (117) verrattuna on siinä, että on päästy eroon yhdestä vaihto-operaatiosta.

Vastaavasti voidaan sieventää lauseketta (118) lisäämällä ensin mallikaavioon yksi nollasarake. Nyt voidaan kirjoittaa

$$(121) \quad \prod_{i \in J_s} R_{is} (C \Pi \hat{y}) = D_0^s V_{s0} \prod_{i \in J_s} U_{i0}^{(\epsilon_i)} K_{s0}^{(1)} (0 \ C \ \Pi \ \hat{y}),$$

jossa niinkään on säästetty yksi vaihto-operaatio verrattuna esitykseen (118).

Voidaan osoittaa (ks. liite 3), että epäkeskisen vaihto-operaation avulla saadaan R -operaatiolle kirjoitetuksi yhteyttä

$$R_{rs} = S_s U_{rs} L_s$$

muistuttava mutta operaatiotulon keskimmäisen jäsenen osalta yksinkertaisempi esitys

$$(122) \quad R_{rs}^{(\epsilon)} = S_{sr} K_{sr}^{(\epsilon)} L_{sr},$$

olettaen tietysti, että operaatio V_{sr} eli S_{sr} tai L_{sr} on määritelty po. tilanteessa, eli että pivotointielementti c_{sr} on koko ajan nollasta poikkeava.

Kaava (122) tarjoaa yhteyden teoreeman 1 raja-arvotarkasteluihin: operaatio L_{sr} saa aikaan juuri yhtälössä (62) esitetyt

muunnokset, jonka jälkeen yhdistelmä $S_{sr} K_{sr}^{(\epsilon)}$ huolehtii rivin s ja sarakkeen r nollauksesta, kun annetaan $\epsilon \rightarrow \infty$.

Yhtälön r eksogenisoinnilla tarkoitetaan käyttäytymisyhtälön selitettävän muuttujan y_r yhtälön korvaamista tyyppiä $y_r = \hat{y}_r$ olevalla sijoitusyhtälöllä. Muuttujan y_r kytkentöjä muihin yhtälöihin ei kuitenkaan katkaista, joten kyseessä on ainoastaan matriisien Γ ja B riviin r kohdistuva operaatio. Käytetään indeksijoukkoja J_r^E ja J_r^X osoittamaan, mitkä rivin r elementit matriiseissa Γ ja B ovat nolasta poikkeavia, ts. $j \in J_r^E$, jos $\gamma_{rj} \neq 0$ ja $k \in J_r^X$, jos $\beta_{rk} \neq 0$. Yhtälön r eksogenisoinnin vaikutus matriiseihin C ja Π voidaan nyt esittää

$$\begin{aligned}
 (123) \quad & \prod_{\substack{j \in J_r^E \\ j \neq r}} R_{rj}^{(-\gamma_{rj})} \prod_{k \in J_r^X} U_{rk}^{(-\beta_{rk})} (C \Pi) \\
 &= S_r \prod_{\substack{j \in J_r^E \\ j \neq r}} T_{jr}^{(\gamma_{rj})} L_r \prod_{k \in J_r^X} U_{rk}^{(-\beta_{rk})} (C \Pi) \\
 &= S_r \prod_{\substack{j \in J_r^E \\ j \neq r}} T_{jr}^{(\gamma_{rj})} L_r S_r \prod_{k \in J_r^X} K_{rk}^{(-\beta_{rk})} L_r (C \Pi) \\
 &= S_r \prod_{\substack{j \in J_r^E \\ j \neq r}} T_{jr}^{(\gamma_{rj})} \prod_{k \in J_r^X} K_{rk}^{(-\beta_{rk})} L_r (C \Pi).
 \end{aligned}$$

Viimeksi kirjoitettu lauseke sievenee käytännössä hyvin yksinkertaiseksi: on ensinnäkin helppo nähdä, että rakennemuodon yhtälön r eksogenisoiminen, so. elementtien γ_{ri} ja β_{rk} nollaan lukuunottamatta elementtiä $\gamma_{rr} = 1$, merkitsee redusoidun muodon puolella rivin r nollautumista matriisissa C ja Π , lukuunottamatta elementtiä $c_{rr} = 1$. Toisaalta operaatiotulot

$$\prod_{\substack{j \in J^E \\ j \neq r}} \tau_{jr}^{(\gamma_{rj})} \quad \text{ja} \quad \prod_{k \in J_r^X} K_{rk}^{(-\beta_{rk})}$$

vaikuttavat ainoastaan rivin r elementteihin, joten muidenkin rivien osalta selvittäään hyvin vähäisillä toimenpiteillä. Eksogenisoinnin vaikutus matriisiin $(C \ \Pi)$ elementteihin saadaankin esiin varsin vähällä vaivalla:

1) Suoritetaan $L_r(C \ \Pi)$

2) Nollataan rivi r lukuunottamatta elementtiä $c_{rr} = 1$

Supistusoperaatiotahan (S_r) ei vaiheen 2 jälkeen ole enää tarvetta suorittaa.

Käänteinen tapaus eksogenisoinnille on muuttujan *endogenisointi*. Tällöin lähtökohtana on jokin "sijoitusyhtälö" $z_k = z_k^0$ esityksen (104) hengessä, ja tarkoituksena on korvata se jollakin vähemmän triviaalilla yhtälöllä, joka on jokin lineaarinen lauseke mallin muista endogeenisista ja eksogeenisista muuttujista. Tapauksen käsittely hoituu aivan vastaavaan tapaan kuin eksogenisointi kaavassa (123) eikä sitä tässä erikseen käsitellä.

Suunta tosin on nyt yksinkertaisemmasta mallista kohti monimutkaisempaa päinvastoin kuin eksogenisoinnin tapauksessa, eikä vastaavanlainen sieventely kuin edellä luonnollisesti-kaan nyt onnistu.

5.3. Esimerkki OREM-käsitteiden soveltamisesta: ratkaisun herkkyys eksogenisoitaessa osa yhtälöistä

Yksi tärkeä sovellutuskohde osittain redusoituihin muotoihin liittyvälle välineistölle on mallin ratkaisun herkkyyden tarkastelu suoritettaessa eksogenisoiteja joillekin mallin (käyttäytymis)yhtälöille. Olkoon lähtökohtana redusoitu muoto (C II) ja tiettyä valintaa z^0 , d^0 vastaava perusratkaisu \hat{y} . Eksogenisoidaan nyt yhtälöt y_U , $U \subset R$, arvoihin $y_U = y_U^E$. Ongelmana on nyt se, miten ratkaisuvektori \hat{y} muuttuu eksogenisoiduttomien yhtälöiden y_V , $V = N - U$, osalta. Lisäksi on luontevaa kysyä, miten C- ja Π -matriisit reagoivat suoritettuihin eksogenisointeihin.

Vastauksen selvillesaamiseksi lavennetaan endogeeniset muuttujat y_h , $h \in U$, takaisin malliin eli suoritetaan operaatio L_U . Koska OREM-yhtälöt toteuttavat mallin ratkaisun, voidaan kirjoittaa

$$(124) \quad \begin{cases} C_{UU}^+ \hat{y}_U - C_{UV}^+ d_V^0 - \Pi_U^+ z^0 = d_U^0 \\ -C_{VU}^+ \hat{y}_U + C_{VV}^+ d_V^0 + \Pi_V^+ z^0 = \hat{y}_V, \end{cases}$$

missä yläindeksillä + merkityt matriisit C_{UU}^+ jne. ovat normaalit ositusta (U,V) vastaavat OREM-kerroinmatriisit, vrt. esim. (96).

Eksogenisoinnin jälkeen muuttujien y_U ratkaisuarvot ovat

$$y_U^E = \hat{y}_U + \Delta y_U,$$

toisin sanoen merkitään ratkaisun muutosta vektorilla Δy_U .

Vastaavasti merkitään muuttujien y_V uusia arvoja

$$y_V^{(E)} = \hat{y}_V + \Delta y_V.$$

Eksogenisointeja vastaava ratkaisu voitaisiin yhtä hyvin saada aikaan muuttamalla sopivasti eksogenisoitavien yhtälöiden virhetermien arvoja. Merkitään sopivia (toistaiseksi tuntemattomia) virhetermimuutoksia vektorilla δ_U , toisin sanoen virhetermien uusille arvoille $d_U^{(E)}$ pätee

$$d_U^{(E)} = d_U^0 + \delta_U.$$

Koska tarkasteltava OREM toteuttaa myös uuden malliratkaisun, voidaan kirjoittaa

$$(125) \quad \begin{cases} C_{UU}^+(\hat{y}_U + \Delta y_U) - C_{UV}^+ d_V^0 - \Pi_U^+ z^0 = d_U^0 + \delta_U \\ -C_{VU}^+(\hat{y}_U + \Delta y_U) + C_{VV}^+ d_V^0 + \Pi_V^+ z^0 = \hat{y}_V + \Delta y_V \end{cases}$$

Vähentämällä yhtälöt (124) yhtälöistä (125) saadaan

$$(126) \quad \begin{cases} \delta_U = C_{UU}^+ \Delta y_U \\ \Delta y_V = -C_{VU}^+ \Delta y_U \end{cases}$$

Yhtälö (126) antaa yksinkertaiset lausekkeet eksogenisoiteja vastaaville lisäsiirroille,

$$\delta_U = C_{UU}^+ \Delta y_U = C_{UU}^{-1} \Delta y_U$$

sekä muuttujien y_V ratkaisun muutokselle

$$\Delta y_V = -C_{VU}^+ \Delta y_U = C_{VU} C_{UU}^{-1} \Delta y_U,$$

eksogenisoitujen muuttujien ratkaisuarvojen muutosten, Δy_U , avulla lausuttuna.

Matriisien C ja Π reagoiminen muuttujien y_U eksogenisoiteihin taas on selvää jo edellisen kappaleen eksogenisointitarkastelun nojalla: muuttujien y_U yhtälöiden kertoimet nolautuvat ja muuttujien y_V osalta uudet relevantit c_{ij} - ja π_{ik} -kertoimet ovat operaatiota $L_U(C \Pi)$ vastaavia OREM-kertoimia.

5.4. Esimerkkejä

Ensimmäisenä esimerkkinä usean parametrimuutoksen vaikutuksista tarkastellaan mitä tapahtuu, kun kappaleen 3.6. esimerkeinä käytetyt yksittäiset parametrimuutokset ($\gamma_{pcpr,H}$:n ja $\gamma_{cpr,wzd}$:n muutokset) tapahtuvat samanaikaisesti. Otetaan esimerkiksi yhdistelmä

$$\epsilon_{pcpr,H} = -.15 \text{ ja } \epsilon_{cpr,wzd} = .1.$$

Näitä muutoksia vastaavat erillisvaikutukset mallikaavioon $[C \Pi \hat{y}]$ on esitetty sivuilla 53 ja 61. Muutosten yhteisvaikutukseksi eli erotukseksi

$$(R_{pcpr,H}^{(-.15)} R_{cpr,wzd}^{(.1)} [C \Pi \hat{y}]) - [C \Pi \hat{y}]$$

saadaan

C(i,j)	- 1 -											
	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9	-10	-11	-12
	N	xgw	wg	aII	DU	wI	pcpr	pipr	pxgD	pcg	cpr	iasc
-1 N	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.00	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
-2 xgw	0.00	0.00	0.00	-0.01	0.02	-0.02	-0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
-3 wg	-0.04	-0.01	0.02	-0.06	0.07	0.00	0.17	0.00	0.01	0.00	-0.03	-0.01
-4 aII	-0.01	0.00	0.00	-0.01	0.03	-0.02	0.02	0.00	0.00	0.00	-0.01	0.00
-5 DU	0.00	0.00	0.00	0.00	-0.01	0.00	-0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
-6 wI	0.00	0.00	0.00	0.04	-0.12	0.13	0.09	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
-7 pcpr	0.02	0.01	-0.01	0.08	-0.25	0.26	0.15	0.00	0.00	0.00	0.01	0.00
-8 pipr	0.00	0.00	0.00	0.02	-0.05	0.05	0.03	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
-9 pxgD	0.00	0.00	0.00	0.01	-0.03	0.03	0.02	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
-10 pcg	0.01	0.00	0.00	0.03	-0.10	0.11	0.07	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
-11 cpr	-0.04	-0.01	0.02	-0.07	0.13	-0.07	0.09	0.00	0.01	0.00	-0.03	-0.01
-12 iasc	-0.01	0.00	0.00	0.01	-0.07	0.10	0.12	0.00	0.00	0.00	-0.01	0.00
-13 H	0.01	0.00	0.00	0.04	-0.14	0.14	0.09	0.00	0.00	0.00	0.01	0.00
-14 WZD	0.00	0.00	0.00	0.01	-0.05	0.06	0.05	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
-15 m	-0.03	-0.01	0.02	-0.05	0.05	0.00	0.15	0.00	0.01	0.00	-0.03	-0.01
-16 d	-0.02	-0.01	0.01	-0.03	0.06	-0.03	0.05	0.00	0.00	0.00	-0.01	0.00
-17 y	-0.01	0.00	0.01	-0.03	0.06	-0.04	0.03	0.00	0.00	0.00	-0.01	0.00
-18 wzd	-0.02	-0.01	0.01	-0.07	0.20	-0.20	-0.09	0.00	0.00	0.00	-0.01	0.00

P(i,k)	- 1 -									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	B.S.	const.	WZD/1	Cpr/1	mw	pxgD	F	TiDN	SUB	wex
-1 N	-0.09	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
-2 xgw	-0.07	-0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
-3 wg	-1.34	0.29	-0.01	0.01	-0.03	0.02	0.00	0.04	0.00	0.02
-4 aII	-0.28	0.04	0.00	0.00	-0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
-5 DU	0.08	-0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
-6 wI	0.38	0.11	0.00	0.00	0.00	0.02	0.00	0.02	0.00	0.02
-7 pcpr	1.01	0.15	0.01	-0.01	0.01	0.03	0.00	0.03	0.00	0.03
-8 pipr	0.19	0.03	0.00	0.00	0.00	0.01	0.00	0.01	0.00	0.01
-9 pxgD	0.13	0.02	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
-10 pcg	0.39	0.07	0.00	0.00	0.00	0.01	0.00	0.01	0.00	0.01
-11 cpr	-1.33	0.18	-0.01	0.01	-0.03	0.01	0.00	0.02	0.00	0.00
-12 iasc	-0.13	0.17	0.00	0.00	-0.01	0.02	0.00	0.02	0.00	0.02
-13 H	0.51	0.09	0.00	0.00	0.01	0.02	0.00	0.02	0.00	0.02
-14 WZD	0.05	0.07	0.00	0.00	0.00	0.01	0.00	0.01	0.00	0.01
-15 w	-1.18	0.26	-0.01	0.01	-0.03	0.02	0.00	0.03	0.00	0.01
-16 d	-0.69	0.11	-0.01	0.01	-0.01	0.01	0.00	0.01	0.00	0.00
-17 y	-0.55	0.06	0.00	0.00	-0.01	0.00	0.00	0.01	0.00	0.00
-18 wzd	-0.96	-0.08	-0.01	0.01	-0.01	-0.02	0.00	-0.02	0.00	-0.02

Asetelman perusopetus on tietenkin se, että parametrimuutosten erillisvaikutuksista ei pelkällä yhteenlaskulla päästä niiden yhteisvaikutukseen, vaan yhteydet ovat selvästi monimutkaisempia. Toisaalta esimerkki viittaa siihen, että erillisvaikutusten yhteenlaskeminen ei välttämättä ole kovin huono approksimaatio, vaan ilmeisesti täysin siedettävä vaihtoehto silloin, kun huolellisempaan analyysiin ei syystä tai toisesta ole edellytyksiä.

Tarkastellaan seuraavaksi yhteen yhtälöön kohdistuvia useita parametrimuutoksia. Oletetaan, että mallin joitakin parametreja ei halutakaan kiinnittää täsmällisiin numeroarvoihin, vaan niiden sijasta tyydytään määrittelemään po. parametreille järkeviltä tuntuvat vaihtelualueet. Toisin sanoen, sen sijaan että kerroinmatriiseja Γ ja B pidettäisiin periaatteessa kiinteinä, $F = \hat{\Gamma}$ ja $B = \hat{B}$, merkitään väljemmin

$$\underline{\Gamma} \leq \Gamma \leq \bar{\Gamma}$$

$$\underline{B} \leq B \leq \bar{B}.$$

Otetaan esimerkiksi kulutusyhtälö (cpr). Määritellään sen kaikkien selittävien muuttujien kertoimille ylä- ja alarajat seuraavasti:

$$-0.465 \leq \gamma_{\text{cpr,wzd}} \leq -0.265$$

$$2.007 \leq \gamma_{\text{cpr,DU}} \leq 2.807$$

$$0.335 \leq \beta_{\text{cpr,WZD}_{-1}} \leq 0.535$$

$$-0.535 \leq \beta_{\text{cpr,Cpr}_{-1}} \leq -0.335.$$

Lisäksi vaaditaan, että edelleenkin pätee yhteys $\beta_{\text{cpr,WZD}_{-1}} = -\beta_{\text{cpr,Cpr}_{-1}}$. Esitetyt rajat ovat puhtaasti esimerkinomaisia ja valittu vailla mitään erityisiä tilastotieteellisiä perusteita (estimaatin luottamusrajat jollakin luottamustasolla (tms.)).

Nyt ollaan kiinnostuneita siitä, millaisia arvoja C , Π ja \hat{y} voivat saada rakennemuodon kertoimien varioidessa esitetyllä tavalla. Erityisesti kysytään, millaisia minimi- ja maksimi-arvoja yksittäiset $C:n$, $\Pi:n$ ja $\hat{y}:n$ elementit voivat saada annetuilla ehdoilla.

Kysymyksenasettelu johtaa tässä hyvin lähelle niitä pohdintoja, joita esim. Rössier on harrastanut ekonometristen mallien yhteydessä nimikkeen "geometrinen lähestymistapa" alla (ks. Ritschard & Rossier, 1980).

On helppo osoittaa, että mitä tahansa yksittäistä kiinnostuksen kohdetta ($C:n$, $\Pi:n$ tai $\hat{y}:n$ elementtiä) seurataankin, kyseinen elementti saavuttaa ääriarvonsa tarkastelun jossakin kulmapisteessä, so. pisteessä, jossa jokainen muuttuva parametri on ääriasennossaan (ylä- tai alarajallaan). Jos parametreja, joiden sallitaan varioida jollakin välillä, on K kappaletta, on tarkastelussa 2^K kulmapistettä.

Mikäli kulmapisteiden lukumäärä on kohtuullisen pieni, kuten kulutusyhtälöesimerkissä, on järkevä ratkaisu yksinkertaisesti käydä kaikki kulmapisteet läpi ja sitä kautta löytää kiinnostavat maksimit ja minimi. Kulmapisteet voidaan asettaa sellaiseen järjestykseen, että järjestyksessä peräkkäiset kulmapisteet eroavat toisistaan vain yhden parametriarvon osalta ja että kukin kulmapiste esiintyy sarjassa vain kerran. Tällöin siirtyminen kulmapisteestä toiseen käy verraten kevyesti vaatien kullakin askeleella vain yhden R - tai U -operaation suorituksen.

Haluttu järjestys löydetään esimerkiksi seuraavasti: merkitään kunkin muuttuvan kertoimen alarajaa $0:lla$ ja ylärajaa $1:lla$. Esimerkiksi kulmapiste, jossa kukin muuttuva kerroin on alarajallaan, koodataan yksinkertaisesti

$$[0 \ 0 \ \dots \ 0]$$

K kappaletta .

Numeroidaan tämä kulmapiste ykköseksi. Seuraava kulmapiste voisi olla

$$[0 \ 0 \ \dots \ 0 \ 1]$$

eli piste, jossa ensimmäinen muuttuva kerroin on ylärajallaan ja muut $(K-1)$ kerrointa ovat alarajallaan (koodia luetaan oikealta vasemmalle).

Merkitään yleisesti ℓ . kulmapisteen koodia $b_\ell = [b_{\ell K} \dots b_{\ell 2} \ b_{\ell 1}]$, $\ell = 1, \dots, 2^K$. Olkoon q koodin elementin järjestysnumero oikealta luettuna, $q = 1, \dots, K$. Voidaan osoittaa, että kulmapisteille löydetään halutunlainen järjestys soveltamalla kaavaa

$$(127) \quad b_{\ell q} = \left\lceil \frac{\ell-1}{2^q} \right\rceil \bmod 2,$$

$$\ell \in [1, 2^K], \quad q \in [1, K].$$

Seuraavassa on esimerkkinä tulostettu yksi tietyssä kulmapisteessä lasketun mallikaavion ja alkuperäisen mallikaavion erotus. Po. kulmapisteessä $\gamma_{\text{cpr}, \text{wzd}}$ on alarajallaan, $\gamma_{\text{cpr}, \text{DU}}$ on ylärajallaan, $\beta_{\text{cpr}, \text{WZD}_{-1}}$ alarajallaan ja $\beta_{\text{cpr}, \text{Cpr}_{-1}}$ ylärajallaan.

C(1,j)

	- 1 -											
	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9	-10	-11	-12
	N	xgw	mg	aII	DU	wI	pcpr	pipr	pxgD	pcg	cpr	iasc
-1 N	0.01	0.00	0.00	0.02	-0.05	0.00	-0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
-2 xgw	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
-3 mg	0.11	0.03	-0.06	0.29	-0.89	0.00	-0.19	0.00	-0.02	0.01	0.08	0.02
-4 aII	0.02	0.01	-0.01	0.05	-0.14	0.00	-0.03	0.00	0.00	0.00	0.01	0.00
-5 DU	-0.01	0.00	0.00	-0.01	0.04	0.00	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
-6 wI	0.01	0.00	-0.01	0.03	-0.10	0.00	-0.02	0.00	0.00	0.00	0.01	0.00
-7 pcpr	0.00	0.00	0.00	0.00	-0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
-8 pipr	0.00	0.00	0.00	0.00	-0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
-9 pxgD	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
-10 pcg	0.00	0.00	0.00	0.01	-0.03	0.00	-0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
-11 cpr	0.09	0.03	-0.05	0.22	-0.68	0.00	-0.14	0.00	-0.01	0.00	0.06	0.02
-12 iasc	0.04	0.01	-0.02	0.11	-0.34	0.00	-0.07	0.00	-0.01	0.00	0.03	0.01
-13 H	0.00	0.00	0.00	0.01	-0.04	0.00	-0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
-14 WZD	0.01	0.00	-0.01	0.04	-0.12	0.00	-0.02	0.00	0.00	0.00	0.01	0.00
-15 m	0.10	0.03	-0.06	0.26	-0.78	0.00	-0.17	0.00	-0.02	0.00	0.07	0.02
-16 d	0.05	0.01	-0.03	0.12	-0.38	0.00	-0.08	0.00	-0.01	0.00	0.04	0.01
-17 y	0.03	0.01	-0.02	0.09	-0.26	0.00	-0.06	0.00	-0.01	0.00	0.02	0.01
-18 wzd	0.01	0.00	-0.01	0.03	-0.10	0.00	-0.02	0.00	0.00	0.00	0.01	0.00

P(i,k)

	- 1 -									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	B.S.const.	WZD/1	Cpr/1		mw	pxgD	F	TiDN	SUB	wex
-1 N	0.11	-0.05	-0.01	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
-2 xgw	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
-3 mg	1.89	-0.80	-0.13	0.13	0.08	-0.01	-0.01	-0.04	0.00	0.00
-4 aII	0.30	-0.13	-0.02	0.02	0.01	0.00	0.00	-0.01	0.00	0.00
-5 DU	-0.09	0.04	0.01	-0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
-6 wI	0.20	-0.09	-0.01	0.01	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
-7 pcpr	0.03	-0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
-8 pipr	0.03	-0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
-9 pxgD	-0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
-10 pcg	0.06	-0.02	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
-11 cpr	1.45	-0.61	-0.10	0.10	0.06	-0.01	0.00	-0.03	0.00	0.00
-12 iasc	0.72	-0.30	-0.05	0.05	0.03	0.00	0.00	-0.02	0.00	0.00
-13 H	0.08	-0.03	-0.01	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
-14 WZD	0.25	-0.10	-0.02	0.02	0.01	0.00	0.00	-0.01	0.00	0.00
-15 m	1.66	-0.70	-0.12	0.12	0.07	-0.01	-0.01	-0.04	0.00	0.00
-16 d	0.80	-0.34	-0.06	0.06	0.03	0.00	0.00	-0.02	0.00	0.00
-17 y	0.56	-0.24	-0.04	0.04	0.02	0.00	0.00	-0.01	0.00	0.00
-18 wzd	0.22	-0.09	-0.02	0.02	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00

Tässä yhteydessä ei pysähdytä tarkastelemaan, mitä ääriarvoja mahdollisesti liittyy juuri esillä olevaan esimerkkikulmapisteeseen. Sen sijaan esitetään perusratkaisun muutos kaikissa kulmapisteissä (s. 116). Huomattakoon, että vaatimus

$\beta_{cpr,WZD_{-1}} = -\beta_{cpr,Cpr_{-1}}$ on täytetty vain kahdeksassa kulmapisteessä, mikä pudottaa puolet pisteistä kiinnostuksen ulkopuolelle. Jäljelle jääviä relevantteja kulmapisteitä vastaavat rivit on alleviivattu.

1. cpr	WZD/1	(0.100, -0.100)
2. cpr	Cpr/1	(-0.100, 0.100)
3. cpr	wzd	(-0.100, 0.100)
4. cpr	DU	(0.400, -0.400)

RAH:ssa SPESIFIOIDUT MUUTOKSET:

1	cpr/WZD/1/ .1	-.1
2	cpr/Cpr/1/-.1	.1
3	cpr/wzd/-.1	.1
4	cpr/DU/ .4	-.4

Parametrit

muutos:	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9	-10	-11	-12	-13	-14	-15	-16	-17	-18
4321	N	rgw	mg	all	DU	WI	pcpr	pipr	pxgD	pcg	cpr	iasc	H	WZD	m	d	y	wzd
1 0000	0.14	0.01	2.33	0.37	-0.11	0.25	0.03	0.03	-0.01	0.07	1.79	0.89	0.09	0.30	2.06	0.99	0.69	0.27
2 0001	-0.10	0.00	-1.72	-0.28	0.08	-0.19	-0.03	-0.03	0.01	-0.05	-1.31	-0.65	-0.07	-0.22	-1.51	-0.73	-0.51	-0.20
3 0011	0.11	0.00	1.89	0.30	-0.09	0.20	0.03	0.03	-0.01	0.06	1.45	0.72	0.08	0.25	1.66	0.80	0.56	0.22
4 0010	0.35	0.01	5.94	0.95	-0.27	0.64	0.09	0.09	-0.03	0.18	4.55	2.26	0.24	0.77	5.23	2.51	1.75	0.69
5 0110	0.16	0.01	2.79	0.45	-0.13	0.30	0.04	0.04	-0.02	0.09	2.14	1.06	0.11	0.36	2.45	1.18	0.82	0.32
6 0111	-0.06	0.00	-1.11	-0.18	0.05	-0.12	-0.02	-0.02	0.01	-0.03	-0.85	-0.42	-0.04	-0.14	-0.98	-0.47	-0.33	-0.13
7 0101	-0.27	-0.01	-4.58	-0.73	0.21	-0.49	-0.07	-0.07	0.03	-0.14	-3.50	-1.74	-0.18	-0.60	-4.03	-1.94	-1.35	-0.53
8 0100	-0.04	0.00	-0.68	-0.11	0.03	-0.07	-0.01	-0.01	0.00	-0.02	-0.52	-0.26	-0.03	-0.09	-0.60	-0.29	-0.20	-0.08
9 1100	-0.10	0.00	-1.71	-0.27	0.08	-0.18	-0.03	-0.03	0.01	-0.05	-1.31	-0.65	-0.07	-0.22	-1.51	-0.72	-0.50	-0.20
10 1101	-0.31	-0.01	-5.39	-0.86	0.25	-0.58	-0.08	-0.08	0.03	-0.16	-4.12	-2.05	-0.22	-0.70	-4.74	-2.28	-1.59	-0.62
11 1111	-0.12	-0.01	-2.12	-0.34	0.10	-0.23	-0.03	-0.03	0.01	-0.06	-1.62	-0.80	-0.09	-0.28	-1.86	-0.90	-0.62	-0.24
12 1110	0.09	0.00	1.56	0.25	-0.07	0.17	0.02	0.02	-0.01	0.05	1.19	0.59	0.06	0.20	1.37	0.66	0.46	0.18
13 1010	0.26	0.01	4.47	0.72	-0.21	0.48	0.07	0.07	-0.02	0.14	3.43	1.70	0.18	0.58	3.94	1.89	1.32	0.52
14 1011	0.04	0.00	0.66	0.11	-0.03	0.07	0.01	0.01	0.00	0.02	0.51	0.25	0.03	0.09	0.58	0.28	0.20	0.08
15 1001	-0.16	-0.01	-2.73	-0.44	0.13	-0.29	-0.04	-0.04	0.02	-0.08	-2.09	-1.04	-0.11	-0.36	-2.40	-1.15	-0.80	-0.32
16 1000	0.06	0.00	1.08	0.17	-0.05	0.12	0.02	0.02	-0.01	0.03	0.83	0.41	0.04	0.14	0.95	0.46	0.32	0.13

Edellisessä asetelmassa vaakavektorit kuvaavat ratkaisuvektorin poikkeamista perusratkaisusta eri kulmapisteissä. Poikkeamavektorit ovat lineaarisesti riippuvia ja vastaavat itse asiassa mallikaavion cpr-saraketta sopivilla vakioilla kerrottuna, kuten helposti nähdään palauttamalla mieleen yhtälömuutosten d-termitulkinnat. Tämä pätee yleisemminkin: kirjoitettiinpa rakennemuodon matriisien Γ ja B muuttujaa cpr vastaavalle riville mitä tahansa äärellisiä reaalityyppisiä lukuja siten, että Γ säilyy ei-singulaarisena, kutakin uutta yhtälöspesifiointia vastaavan ratkaisuvektorin poikkeama perusratkaisuvektorista voidaan esittää alkuperäisen C -matriisin cpr-sarakkeen ja sopivasti valitun skalaarin (yhtälömuutosta vastaavan korjaustermin δ_{cpr}) tulona.

Seuraavana esimerkkinä katsotaan, mitä tapahtuu, kun kulutus-yhtälö eksogenisoidaan alkuperäisen mallikaavion mukaiseen arvoonsa. Eksogenisoinnin jälkeisen mallikaavion ja alkuperäisen mallikaavion erotus näyttää nyt seuraavalta:

C(i,j)	- 1 -											
	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9	-10	-11	-12
	N	xgw	wg	aII	DU	wI	pcpr	pipr	pxgD	pcg	cpr	iasc
-1 N	-0.03	-0.01	0.01	-0.07	0.23	0.00	0.03	0.00	0.00	0.00	-0.02	0.00
-2 xgw	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
-3 wg	-0.44	-0.14	0.25	-1.21	3.90	0.04	0.55	0.01	0.07	-0.02	-0.33	-0.08
-4 aII	-0.07	-0.02	0.04	-0.19	0.63	0.01	0.09	0.00	0.01	0.00	-0.05	-0.01
-5 DU	0.02	0.01	-0.01	0.06	-0.18	0.00	-0.03	0.00	0.00	0.00	0.02	0.00
-6 wI	-0.05	-0.01	0.03	-0.13	0.42	0.00	0.06	0.00	0.01	0.00	-0.04	-0.01
-7 pcpr	-0.01	0.00	0.00	-0.02	0.06	0.00	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
-8 pipr	-0.01	0.00	0.00	-0.02	0.06	0.00	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
-9 pxgD	0.00	0.00	0.00	0.01	-0.02	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
-10 pcg	-0.01	0.00	0.01	-0.04	0.12	0.00	0.02	0.00	0.00	0.00	-0.01	0.00
-11 cpr	-0.23	-0.10	0.19	-0.93	2.99	0.03	0.42	0.01	0.05	-0.02	-0.25	-0.06
-12 iasc	-0.17	-0.05	0.10	-0.46	1.48	0.01	0.21	0.00	0.03	-0.01	-0.12	-0.03
-13 H	-0.02	-0.01	0.01	-0.05	0.16	0.00	0.02	0.00	0.00	0.00	-0.01	0.00
-14 WZD	-0.06	-0.02	0.03	-0.16	0.51	0.00	0.07	0.00	0.01	0.00	-0.04	-0.01
-15 w	-0.28	-0.12	0.22	-1.07	3.44	0.03	0.49	0.01	0.06	-0.02	-0.29	-0.07
-16 g	-0.18	-0.06	0.11	-0.51	1.65	0.02	0.23	0.01	0.03	-0.01	-0.14	-0.03
-17 y	-0.13	-0.04	0.07	-0.36	1.15	0.01	0.16	0.00	0.02	-0.01	-0.10	-0.02
-18 wzd	-0.05	-0.02	0.03	-0.14	0.45	0.00	0.06	0.00	0.01	0.00	-0.04	-0.01

P(i,k)	- 1 -									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	B.S.	const.	WZD/1	Cpr/1	w	pxgD	F	TiDN	SUB	wex
-1 N	0.00	0.00	-0.04	0.04	-0.02	0.00	0.00	0.01	0.00	0.00
-2 xgw	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
-3 wg	0.00	-0.01	-0.71	0.71	-0.32	0.01	0.02	0.12	-0.01	-0.03
-4 aII	0.00	0.00	-0.11	0.11	-0.05	0.00	0.00	0.02	0.00	-0.01
-5 DU	0.00	0.00	0.02	-0.03	0.01	0.00	0.00	-0.01	0.00	0.00
-6 wI	0.00	0.00	-0.08	0.08	-0.03	0.00	0.00	0.01	0.00	0.00
-7 pcpr	0.00	0.00	-0.01	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
-8 pipr	0.00	0.00	-0.01	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
-9 pxgD	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
-10 pcg	0.00	0.00	-0.02	0.02	-0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
-11 cpr	0.00	0.00	-0.54	0.54	-0.24	0.01	0.02	0.09	-0.01	-0.03
-12 iasc	0.00	0.00	-0.27	0.27	-0.12	0.00	0.01	0.05	0.00	-0.01
-13 H	0.00	0.00	-0.03	0.03	-0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
-14 WZD	0.00	0.00	-0.09	0.09	-0.04	0.00	0.00	0.02	0.00	0.00
-15 w	0.00	0.00	-0.63	0.63	-0.28	0.01	0.02	0.10	-0.01	-0.03
-16 g	0.00	0.00	-0.30	0.30	-0.13	0.01	0.01	0.05	0.00	-0.01
-17 y	0.00	0.00	-0.21	0.21	-0.09	0.00	0.01	0.04	0.00	-0.01
-18 wzd	0.00	0.00	-0.08	0.08	-0.04	0.00	0.00	0.01	0.00	0.00

Mallin ratkaisu ei tietenkään ole muuttunut, koska kulutus eksogenisoitiin alkuperäiseen arvoonsa. Niinpä sarakkeella "B.S." on nyt pelkkiä nolliä. Uudessa (eksogenisoinnin jälkeisessä) mallikaaviossa rivin cpr elementit ovat nollautuneet lukuunottamatta elementtiä $c_{cpr,cpr}$, joka saa arvon 1. Uuden ja vanhan kaavion erotuksessa rivin cpr elementit ovatkin yksinkertaisesti alkuperäisten elementtien vastalukuja (pl.

$$\Delta c_{cpr,cpr} = 1 - c_{cpr,cpr}.$$

Muissa c_{ij} - ja π_{ik} -elementeissä on tapahtunut paikoin huomattaviakin muutoksia. Kaaviosta voidaan poimia esim. itseisarvoltaan melkoiset muutokset $\Delta c_{mg,DU} = 3.90$ ja $\Delta \pi_{mg,WZD_{-1}} = -0.71$. Vertailu alkuperäiseen mallikaavioon paljastaa myös joitakin aika erikoisia merkinvaihdoksia: esim. $c_{y,aII}$:n arvo, joka alunperin oli positiivinen (0.24), on nyt negatiivinen (-0.12).

Alkuperäinen inverssielementti c_{ij} ja eksogenisoinnin jälkeinen inverssielementti $c_{ij}^{(E)}$ voivat siis poiketa toisistaan merkittävästikin. Inverssielementtien arvojen perusteella voidaan tehdä kätevästi vertailuja malliratkaisun herkkyydestä toisaalta alkuperäisessä mallissa ja toisaalta eksogenisoinnin jälkeisessä mallissa. Mallin yksittäisen yhtälön muutoksen vaikutukset mallin ratkaisuun voitiin yhtäpitävästi aikaansaada myös po. yhtälön sopivasti valitun virhetermikorjauksen avulla, vrt. s. 26 ja 126. Muuttujan y_i yhtälössä suoritettu virhetermikorjaus δ_i poikkeuttaa muuttujan y_j ratkaisua määrällä $\Delta y_j = c_{ji} \delta_i$ ja muuttujan y_k ratkaisua määrällä $\Delta y_k = c_{ki} \delta_i$. Muuttujan y_i yhtälön muutoksen aiheuttamien poikkeamien suhde on yksinkertaisesti

$$\frac{\Delta y_j}{\Delta y_k} = \frac{c_{ji}}{c_{ki}}.$$

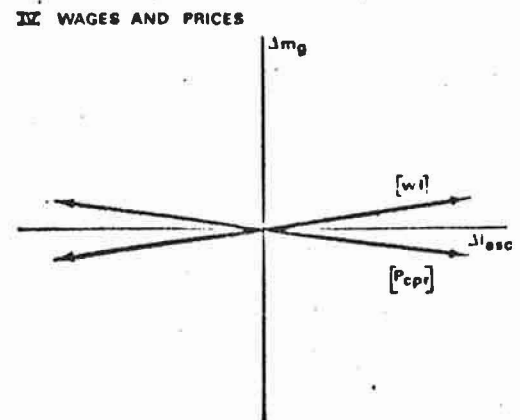
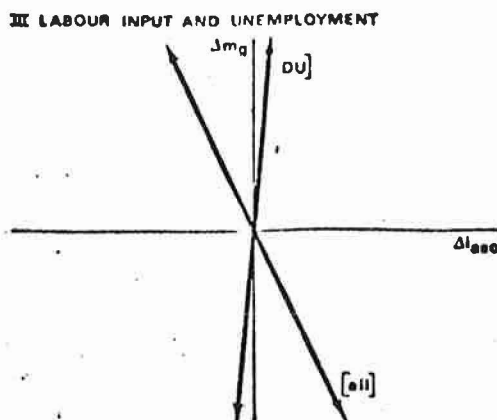
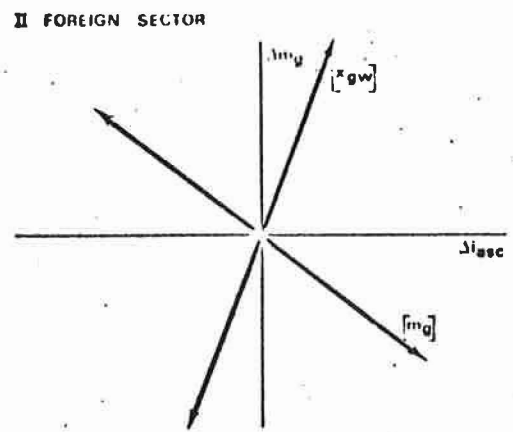
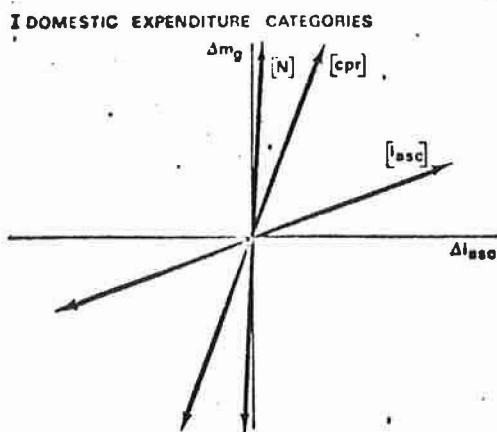
Tämä suhde vaihtelee riippuen siitä, mitkä ovat missäkin tilanteessa relevantit inverssioelementtien arvot.

Otetaan esimerkiksi tavaratuonnin ja investointien ratkaisuarvojen poikkeamat. Muuttujan y_i yhtälön muuttumisen vaikutus projisoituu $(\Delta iasc, \Delta mg)$ -koordinaatistossa origon kautta kulkevalle suoralle, jonka kulmakerroin on

$$\frac{\Delta mg}{\Delta iasc} = \frac{c_{mg,i}}{c_{iasc,i}}.$$

Kutakin varioitavaa yhtälöä i vastaa oma suoransa. Kuviossa 3 on esitetty joitakin tällaisia suoria, jotka liittyvät alkupe-
räisen mallin yhtälömuutosten vaikutuksiin $(\Delta iasc, \Delta mg)$ -tasolla.

Kuvio 3. Yhtälömuutoksia vastaavia suoria $(\Delta iasc, \Delta mg)$ -tasossa



Suorat muodostavat eri suuruisia kulmia Δ iasc-akselin kanssa. Esimerkiksi alkuperäisen mallin länsitavaraviennin (xgw) yhtälön muuttamista vastaava suora, jonka kulmakerroin on

$$\frac{C_{mg,xgw}}{C_{iasc,xgw}} = 2.84,$$

muodostaa 70 asteen kulman Δ iasc-akselin kanssa. Kulmakertoimien arvojen sijasta lienee havainnollisempaa puhua kulmien suuruuksista asteissa ilmaistuna. Seuraavassa asetelmassa on esitetty kulmien suuruudet kahdentoista kiinnostavan (mallikaavion käyttäytymisyhtälöihin liittyvän) suoran osalta. Ensimmäisellä rivillä olevat kulmien suuruudet liittyvät alkuperäiseen malliin ja toisella rivillä olevat sellaiseen malliin, jossa kulutusyhtälö on eksogenisoitu johonkin lukuarvoon.

C(i,j)		- 3 -											
		-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9	-10	-11	-12
		N	xgw	mg	aII	DU	WI	pcpr	pipr	pxgD	pcg	cpr	iasc
28	Arctan	-89.88	70.03	-36.93	-65.07	85.43	8.25	-8.39	-20.30	-27.92	28.21	69.18	19.63

C(i,j)		- 3 -											
		-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9	-10	-11	-12
		N	xgw	mg	aII	DU	WI	pcpr	pipr	pxgD	pcg	cpr	iasc
28	Arctan	-86.71	70.25	-51.79	15.08	3.35	5.81	37.23	-27.78	-17.88	26.13	69.18	16.35

Asteluvuissa ennen ja jälkeen eksogenisoinnin on havaittavissa selviä muutoksia. Tarkastelu osoittaa hyvin, miten toisaalta alkuperäisen mallin ja toisaalta eksogenisoituja yhtälöitä sisältävän mallin alkutilanteessa ehkä yhtenevät ratkaisut voivat reagoida aivan eri tavoin muiden yhtälöiden muutoksiin.

Toisena eksogenisointiesimerkkinä tarkastellaan kolmen yhtälön samanaikaisen eksogenisoinnin vaikutuksia. Yhtälöt ovat muuttujien *cpr*, *mg* ja *iasc* käyttäytymisyhtälöt eli mallin kulutus-, tuonti- ja investointiyhtälöt. Muuttujat eksogenisoidaan perusratkaisusta pari prosenttiyksikköä poikkeaviin arvoihin

$$cpr = 6.26$$

$$mg = 10.19$$

$$iasc = 15.45$$

Näiden eksogenisointien jälkeen mallikaavio näyttää seuraavalta:

C(i,j)	- 1 -											
	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9	-10	-11	-12
	N	xgw	mg	aII	DU	wI	pcpr	pipr	pxgD	pcg	cpr	iasc
-1 N	1.00	0.03	0.00	0.00	-0.01	-0.01	0.00	0.00	-0.02	0.00	0.07	0.02
-2 xgw	0.01	1.00	0.00	-0.09	0.11	-0.13	-0.08	0.00	-0.52	0.00	0.01	0.00
-3 mg	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
-4 aII	0.70	0.14	-0.14	0.99	-0.02	-0.02	0.01	0.01	-0.09	0.01	0.34	0.09
-5 DU	-0.20	-0.04	0.04	-0.29	1.01	0.01	0.00	0.00	0.03	0.00	-0.10	-0.02
-6 wI	0.47	0.10	-0.09	-0.15	-1.07	1.24	0.69	0.00	-0.07	0.06	0.23	0.06
-7 pcpr	0.07	0.01	-0.01	0.13	-0.39	0.45	1.26	0.00	-0.01	0.00	0.03	0.01
-8 pipr	0.07	0.01	-0.01	0.13	-0.39	0.45	0.26	1.00	-0.01	0.00	0.03	0.01
-9 pxgD	-0.02	-0.01	0.00	0.18	-0.21	0.25	0.14	0.00	1.01	0.00	-0.01	0.00
-10 pcg	0.13	0.03	-0.03	0.78	-0.81	0.95	0.54	0.00	-0.02	1.00	0.07	0.02
-11 cpr	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00
-12 iasc	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00
-13 H	0.18	0.04	-0.03	0.37	-1.07	1.25	0.71	0.00	-0.02	0.00	0.09	0.02
-14 WZD	0.57	0.12	-0.11	0.41	-0.53	0.59	0.34	0.00	-0.08	0.00	0.28	0.07
-15 m	0.00	0.00	0.88	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
-16 d	1.01	0.21	0.00	-0.03	-0.03	-0.04	-0.02	0.00	-0.15	0.00	0.49	0.12
-17 y	1.29	0.26	-0.25	-0.03	-0.04	-0.05	-0.03	0.00	-0.19	0.00	0.63	0.16
-18 wzd	0.50	0.10	-0.10	0.28	-0.15	0.14	-0.92	0.00	-0.07	0.00	0.25	0.06

P(i,k)	- 1 -									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	B.S.const.	WZD/1	Cpr/1	mw	pxgD	F	TiDN	SUB	wex	
-1 N	1.63	0.59	0.00	0.00	0.07	0.04	0.00	0.00	0.00	0.04
-2 xgw	15.61	-3.50	0.00	0.00	2.34	-0.01	0.00	-0.02	0.00	0.09
-3 mg	10.19	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
-4 aII	5.12	-0.85	0.00	0.00	0.34	0.02	0.00	0.00	0.00	0.05
-5 DU	-0.79	0.92	0.00	0.00	-0.10	-0.01	0.00	0.00	0.00	-0.01
-6 wI	9.11	0.93	0.00	0.00	0.23	0.13	0.00	0.14	0.00	0.14
-7 pcpr	5.61	2.28	0.00	0.00	0.03	0.21	0.00	0.26	0.00	0.21
-8 pipr	7.75	1.28	0.00	0.00	0.03	0.30	0.00	0.05	0.00	0.30
-9 pxgD	11.56	0.64	0.00	0.00	-0.01	0.02	0.00	0.03	0.00	-0.17
-10 pcg	7.61	3.69	0.00	0.00	0.06	0.15	0.00	0.11	0.00	0.16
-11 cpr	6.26	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
-12 iasc	15.45	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
-13 H	4.91	0.53	0.00	0.00	0.08	0.12	0.00	0.15	0.00	0.13
-14 WZD	14.28	0.04	0.00	0.00	0.27	0.07	0.00	0.07	0.00	0.09
-15 m	9.04	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
-16 d	10.20	-0.05	0.00	0.00	0.48	0.03	0.00	0.00	0.00	0.06
-17 y	10.52	2.26	0.00	0.00	0.62	0.04	0.00	-0.01	0.00	0.08
-18 wzd	8.68	-2.24	0.00	0.00	0.24	-0.13	0.00	-0.19	0.00	-0.12

Kaavion vertaaminen alkuperäiseen mallikaavioon osoittaa heti, että c_{ij} - ja π_{ik} -kertoimet ovat eksogenisoitien johdosta muuttuneet voimakkaasti muuallakin kuin cpr-, mg- ja iasc-riveillä. Tämä ei ole kovin yllättävää, sillä merkitsevähän suoritettut eksogenisoinnit itse asiassa varsin radikaalia puuttumista mallin simultaanirakenteeseen.

Ohjelma tulostaa myös eksogenisoiteja vastaavat laskennalliset tasosiirrot (d-termien muutokset, ks. s. 109), joiksi tässä tapauksessa saatiin

$$\delta_{\text{cpr}} = -1.99$$

$$\delta_{\text{mg}} = -3.53$$

$$\delta_{\text{iasc}} = 2.51$$

Viimeisenä esimerkkinä palataan kappaleen alussa esitettyihin kulmapistetarkasteluihin, mutta annetaan tällä kerralla muutosten tapahtua useassa yhtälössä samanaikaisesti. Otetaan jälleen esimerkiksi kulutus-, tavaratuonti- ja investointiyhtälöt. Annetaan kussakin kolmessa yhtälössä kahden kertoimen vaihdella seuraavasti:

$$-0.465 \leq \gamma_{\text{cpr},\text{WZD}} \leq -0.265$$

$$1.807 \leq \gamma_{\text{cpr},\text{DU}} \leq 3.007$$

$$-1.339 \leq \gamma_{\text{iasc},\text{yn}} \leq -0.339$$

$$-0.739 \leq \gamma_{\text{iasc},(\text{Z-pipr})} \leq -0.139$$

$$-2.758 \leq \gamma_{\text{mg},\text{dn}} \leq -1.758$$

$$-4.074 \leq \gamma_{\text{mg},\text{N}} \leq -2.074$$

Tarkastelun uusia muuttujia ovat yn (BKT-varastojen muutos, volyymi) ja dn (kokonaiskysyntä-varastojen muutos, volyymi), joita vastaavat rivit on ensin lisättävä alkuperäiseen malli-kaavioon. Kun kaaviota lisäksi täydennetään laskuissa tarvittavalla uudella rivillä $z = Z\text{-pipr}$, ja toisaalta kaavion painsumisen estämiseksi siitä riisutaan kolme laskennan kannalta epäoleennaista riviä y, d ja WZD , on lähtötilanne seuraava:

C(i,j)	- 1 -											
	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9	-10	-11	-12
	N	xgw	mg	aII	DU	WI	pcpr	pipr	pxgD	pcg	cpr	iasc
-1 N	1.02	0.04	-0.03	0.05	-0.21	-0.02	-0.02	0.00	-0.02	0.01	0.10	0.02
-2 xgw	0.01	1.00	0.00	-0.09	0.10	-0.13	-0.08	0.00	-0.52	0.00	0.00	0.00
-3 mg	3.45	0.68	0.55	0.97	-3.83	-0.12	-0.06	0.04	-0.20	0.20	1.63	0.41
-4 aII	0.35	0.11	-0.20	1.14	-0.56	-0.09	-0.09	-0.01	-0.05	0.02	0.26	0.07
-5 DU	-0.10	-0.03	0.06	-0.33	1.16	0.03	0.03	0.00	0.02	-0.01	-0.08	-0.02
-6 WI	0.23	0.07	-0.14	-0.05	-1.43	1.20	0.63	-0.01	-0.04	0.07	0.18	0.04
-7 pcpr	0.03	0.01	-0.02	0.15	-0.44	0.45	1.25	0.00	0.00	0.00	0.02	0.01
-8 pipr	0.03	0.01	-0.02	0.15	-0.44	0.45	0.25	1.00	0.00	0.00	0.02	0.01
-9 pxgD	-0.01	0.00	0.01	0.17	-0.19	0.25	0.15	0.00	1.00	0.00	-0.01	0.00
-10 pcg	0.07	0.02	-0.04	0.81	-0.91	0.93	0.52	0.00	-0.01	1.00	0.05	0.01
-11 cpr	0.33	0.10	-0.19	0.93	-2.99	-0.03	-0.42	-0.01	-0.05	0.02	1.25	0.06
-12 iasc	-0.01	0.25	-0.73	-0.45	-0.31	-0.81	0.43	-0.10	0.37	0.37	0.62	1.15
-13 H	0.09	0.03	-0.05	0.40	-1.20	1.23	0.69	0.00	-0.01	0.01	0.07	0.02
-14 wzd	0.25	0.08	-0.15	0.39	-0.53	0.09	-0.99	-0.01	-0.04	0.01	0.19	0.05
-15 m	3.03	0.60	0.48	0.85	-3.37	-0.10	-0.06	0.03	-0.17	0.18	1.44	0.36
-16 dn	0.14	0.25	-0.16	0.32	-1.32	-0.13	-0.15	-0.02	-0.11	0.05	0.59	0.15
-17 yn	-0.67	0.15	-0.34	0.17	-0.74	-0.14	-0.18	-0.03	-0.09	0.01	0.36	0.09
-18 Z-pipr	1.26	0.27	-1.00	-1.36	-0.42	-1.59	1.33	-0.17	1.02	0.83	0.73	0.17

P(i,k)	- 1 -									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	B.S.const.	WZD/1	Cpr/1	mm	pmgD	F	TiDN	SUB	wex	
-1 N	1.73	0.71	0.04	-0.04	0.09	0.03	-0.01	-0.01	0.00	0.05
-2 xgw	15.61	-3.49	0.00	0.00	2.34	-0.01	0.00	-0.02	0.00	0.09
-3 mg	12.19	-0.48	0.71	-0.71	1.58	-0.40	-0.12	-0.02	0.04	-0.05
-4 aII	5.37	-0.16	0.11	-0.11	0.26	0.05	-0.02	-0.02	0.01	0.08
-5 DU	-0.86	0.73	-0.03	0.03	-0.07	-0.01	0.01	0.01	0.00	-0.02
-6 WI	9.28	1.38	0.08	-0.08	0.17	0.15	-0.02	0.13	0.00	0.17
-7 pcpr	5.63	2.34	0.01	-0.01	0.02	0.21	0.00	0.26	0.00	0.21
-8 pipr	7.78	1.34	0.01	-0.01	0.02	0.30	0.00	0.05	0.00	0.31
-9 pxgD	11.55	0.62	0.00	0.00	-0.01	0.02	0.00	0.03	0.00	-0.17
-10 pcg	7.66	3.82	0.02	-0.02	0.05	0.16	0.00	0.11	0.00	0.16
-11 cpr	8.26	0.00	0.54	-0.54	0.24	-0.01	-0.02	-0.09	0.01	0.03
-12 iasc	13.45	7.10	0.27	-0.27	0.57	-0.27	-0.35	0.09	0.12	0.23
-13 H	4.97	0.71	0.03	-0.03	0.07	0.13	-0.01	0.14	0.00	0.14
-14 wzd	8.85	-1.75	0.08	-0.08	0.19	-0.11	-0.01	-0.21	0.00	-0.09
-15 m	10.81	-0.42	0.63	-0.63	1.39	-0.35	-0.11	-0.02	0.04	-0.04
-16 dn	7.29	0.12	0.26	-0.26	0.58	-0.04	-0.05	-0.03	0.02	0.06
-17 yn	6.42	0.27	0.16	-0.16	0.35	0.05	-0.03	-0.04	0.01	0.09
-18 Z-pipr	8.81	11.94	0.32	-0.32	0.64	-0.71	-0.74	0.28	0.25	0.36

Tarkastelussa on nyt mukana kuusi kerrointa, joiden sallitaan varioida ala- ja ylärajojensa välillä. Tämä tuottaa $2^6 = 64$ kulmapistettä.

Huomattakoon, että γ -kertoimien vaihtelualue (ks. sivun 122 epäyhtälöt) on tässä esimerkissä niin kapea, että Γ -matriisi ei tule singulaariseksi missään pisteessä tarkastelualueella

$$\underline{\Gamma} \leq \Gamma \leq \bar{\Gamma}.$$

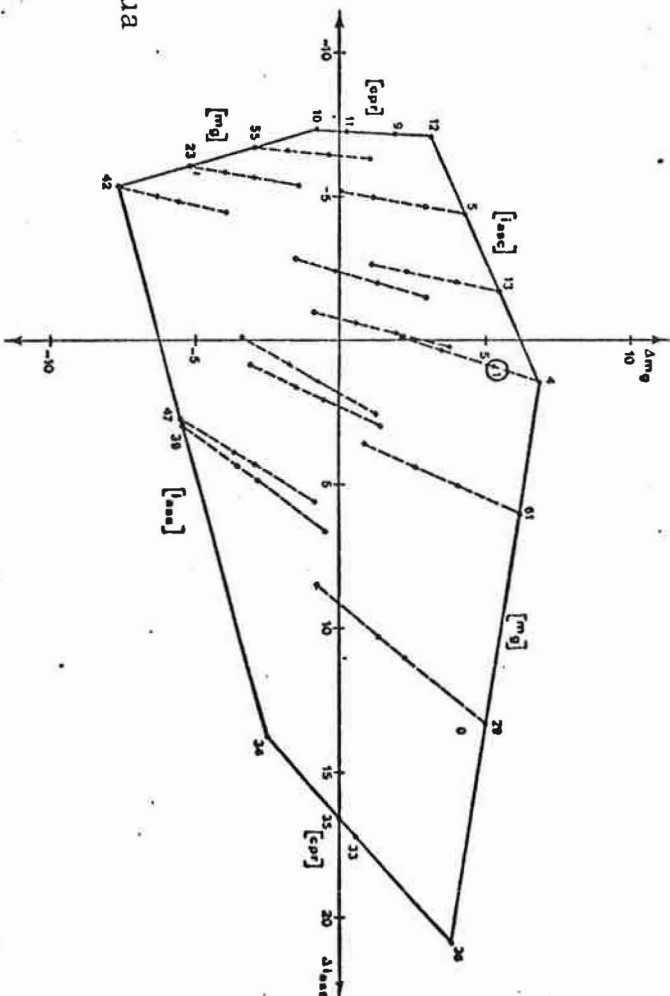
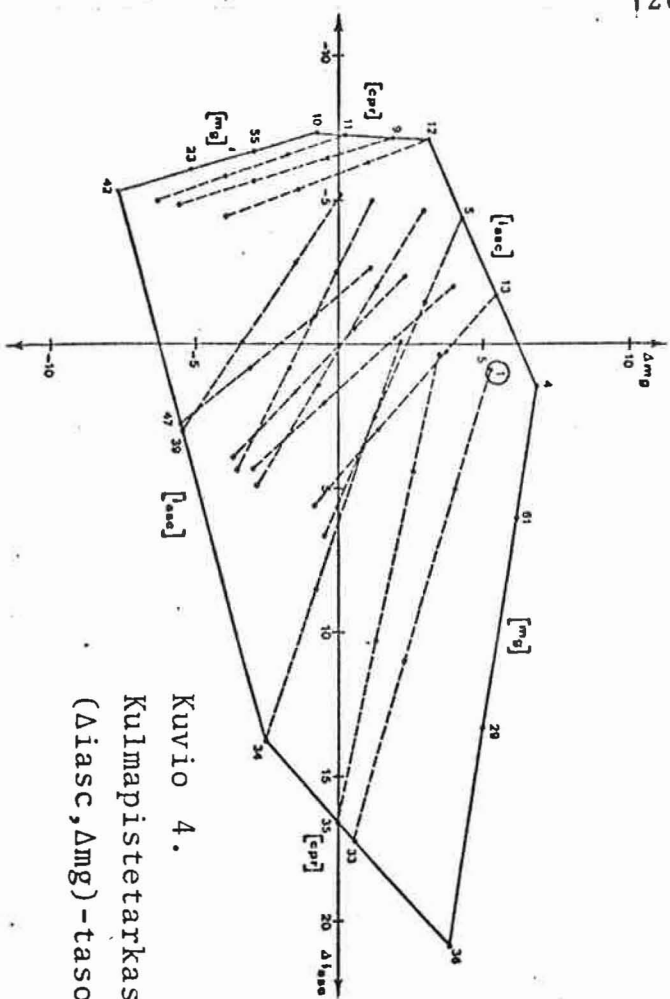
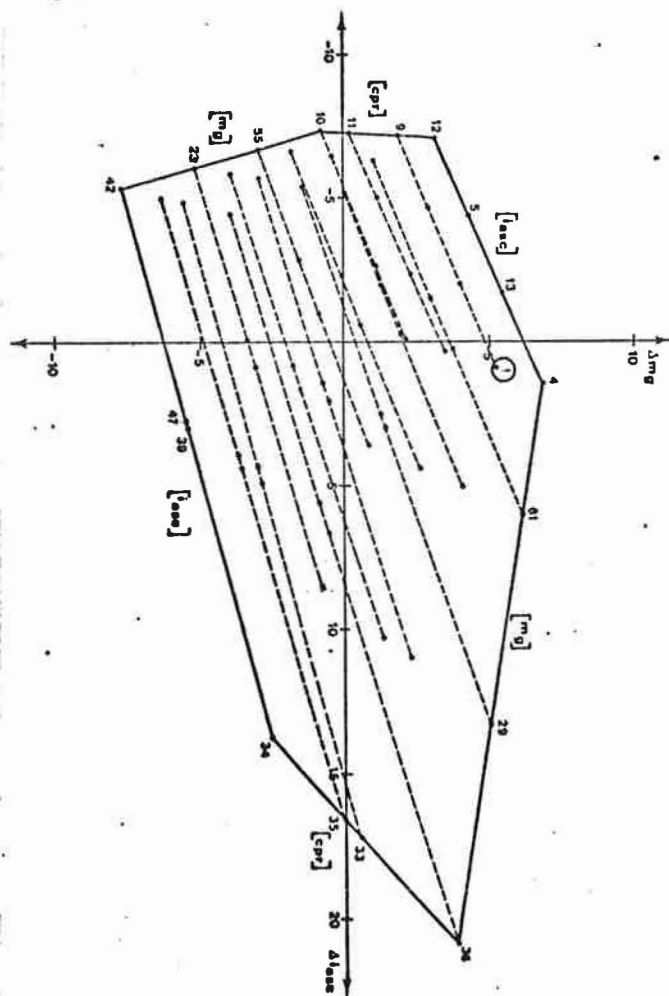
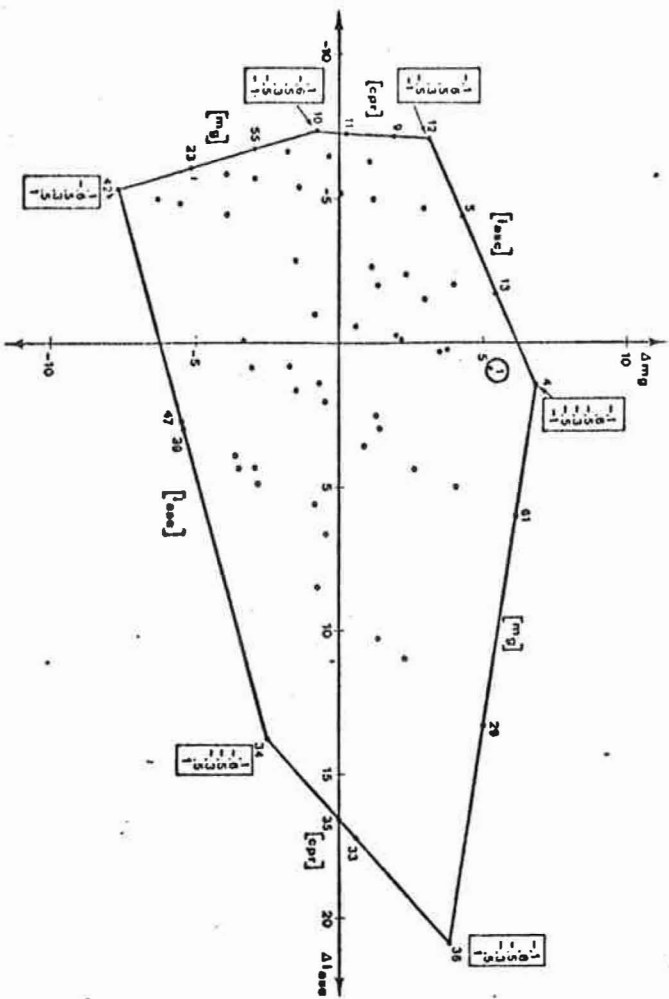
Epäsingulaarisuusvaatimus on täytetty myös sivun 112 epäyhtälöiden implikoimalla Γ -matriisin vaihtelualueella.

Seuraavalla sivulla on tulostettu perusratkaisun muutokset 64 kulmapisteessä niiden endogeenisten muuttujien osalta, jotka tässä vaiheessa ovat edustettuina mallikaavion riveillä. Muutosten maksimi- ja minimiarvot on alleviivattu.

RAM:ssa SPESIFIOIDUT MUUTOKSET:
1 cpr/wzd/-1 .1
2 cpr/DU/-6 .6
3 iasc/yn/-5 .5
4 iasc/Z-piipr/-3 .3
5 ng/dn/-5 .5
6 ng/N/-1 1

Parametrit

muutos:	-1	-2	-3	-4	-5	-6	-7	-8	-9	-10	-11	-12	-13	-14	-15	-16	-17	-18
654321	N	rgw	ng	all	DU	wl	pcpr	piipr	pgd	pcg	cpr	iasc	H	wzd	m	dn	ynZ-piipr	
1 000000	0.00	-0.01	5.24	-0.72	0.20	-0.48	-0.07	-0.07	0.03	-0.14	-0.25	0.86	-0.18	-0.51	4.61	-0.01	-1.31	-4.37
2 000001	-0.15	-0.02	2.16	-1.04	0.30	-0.70	-0.10	-0.10	0.04	-0.20	-2.14	-0.14	-0.26	-0.74	1.90	-0.92	-1.71	-5.01
3 000011	-0.09	-0.01	3.50	-0.90	0.26	-0.60	-0.08	-0.08	0.03	-0.17	-1.32	0.30	-0.22	-0.64	3.08	-0.53	-1.54	-4.73
4 000010	0.07	-0.01	6.84	-0.55	0.16	-0.37	-0.05	-0.05	0.02	-0.10	0.74	1.38	-0.14	-0.39	6.03	0.46	-1.10	-4.04
5 000010	-0.05	-0.01	4.29	-0.81	0.23	-0.55	-0.08	-0.08	0.03	-0.16	0.42	-4.39	-0.20	-0.59	3.70	-0.29	-1.43	-4.51
6 000111	-0.19	-0.02	1.22	-1.13	0.32	-0.76	-0.11	-0.11	0.04	-0.22	-1.57	-4.99	-0.29	-0.82	1.07	-1.20	-1.83	-5.15
7 000101	-0.25	-0.02	0.10	-1.25	0.36	-0.84	-0.12	-0.12	0.04	-0.24	-2.29	-5.21	-0.32	-0.90	0.09	-1.53	-1.98	-5.38
8 000100	-0.11	-0.01	2.94	-0.96	0.27	-0.64	-0.09	-0.09	0.03	-0.18	-0.45	-4.66	-0.24	-0.69	2.59	-0.69	-1.61	-4.79
9 001100	-0.16	-0.02	1.91	-1.06	0.30	-0.71	-0.10	-0.10	0.04	-0.21	-0.54	-7.14	-0.27	-0.77	1.68	-1.00	-1.74	-4.98
10 001101	-0.29	-0.02	-0.76	-1.34	0.38	-0.90	-0.12	-0.12	0.05	-0.26	-2.36	-7.33	-0.34	-0.97	-0.67	-1.78	-2.09	-5.54
11 001111	-0.24	-0.02	0.24	-1.24	0.35	-0.83	-0.11	-0.11	0.04	-0.24	-1.67	-7.26	-0.31	-0.89	0.21	-1.49	-1.96	-5.33
12 001110	-0.10	-0.01	3.12	-0.94	0.27	-0.63	-0.09	-0.09	0.03	-0.18	0.28	-7.05	-0.24	-0.68	2.74	-0.64	-1.59	-4.73
13 001010	0.01	-0.01	5.46	-0.69	0.20	-0.46	-0.07	-0.07	0.02	-0.13	0.57	-1.75	-0.17	-0.50	4.81	0.05	-1.28	-4.30
14 001011	-0.14	-0.02	2.34	-1.02	0.29	-0.68	-0.10	-0.10	0.04	-0.19	-1.44	-2.38	-0.26	-0.73	2.06	-0.87	-1.69	-4.94
15 001001	-0.20	-0.02	1.15	-1.14	0.33	-0.77	-0.11	-0.11	0.04	-0.22	-2.21	-2.63	-0.29	-0.82	1.01	-1.22	-1.84	-5.19
16 001000	-0.06	-0.01	4.03	-0.84	0.24	-0.56	-0.08	-0.08	0.03	-0.16	-0.35	-2.04	-0.21	-0.60	3.55	-0.37	-1.47	-4.59
17 011000	0.09	0.01	-0.52	0.53	-0.15	0.35	0.05	0.05	-0.02	0.10	0.82	2.04	0.13	0.38	-0.46	0.57	0.85	2.39
18 011001	-0.08	0.00	-3.09	0.01	0.00	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	-1.59	0.85	0.00	0.01	-2.72	-0.50	0.13	0.79
19 011011	0.03	0.00	-1.49	0.33	-0.10	0.22	0.03	0.03	-0.01	0.06	-0.02	1.59	0.08	0.24	-1.32	0.16	0.58	1.79
20 011010	0.22	0.01	1.43	0.92	-0.26	0.62	0.09	0.09	-0.03	0.18	2.51	2.95	0.23	0.66	1.26	1.38	1.41	3.61
21 011110	0.03	0.01	-1.42	0.35	-0.10	0.24	0.03	0.03	-0.01	0.06	1.82	-5.38	0.08	0.25	-1.25	0.19	0.60	1.91
22 011111	-0.14	0.00	-3.94	-0.16	0.05	-0.11	-0.01	-0.01	0.00	-0.03	-0.54	-5.85	-0.04	-0.12	-3.47	-0.85	-0.12	0.33
23 011101	-0.22	-0.01	-5.17	-0.41	0.12	-0.27	-0.04	-0.04	0.01	-0.08	-1.69	-6.07	-0.10	-0.30	-4.56	-1.36	-0.46	-0.45
24 011100	-0.07	0.00	-2.93	0.04	-0.01	0.03	0.01	0.01	0.00	0.01	0.41	-5.66	0.01	0.03	-2.58	-0.43	0.17	0.96
25 010100	0.08	0.01	-0.73	0.49	-0.14	0.33	0.05	0.05	-0.02	0.09	0.79	1.39	0.12	0.35	-0.64	0.48	0.80	2.27
26 010101	-0.10	0.00	-3.37	-0.04	0.01	-0.03	0.00	0.00	0.00	-0.01	-1.43	-0.08	-0.01	-0.03	-2.97	-0.61	0.05	0.63
27 010111	0.01	0.00	-1.75	0.28	-0.08	0.19	0.03	0.03	-0.01	0.05	-0.07	0.32	0.07	0.20	-1.54	0.06	0.51	1.64
28 010110	0.21	0.01	1.28	0.89	-0.25	0.60	0.08	0.08	-0.03	0.17	2.47	2.50	0.22	0.64	1.12	1.31	1.36	3.52
29 010010	0.46	0.02	4.98	1.64	-0.47	1.10	0.15	0.15	-0.05	0.32	3.37	13.33	0.42	1.18	4.38	2.85	2.41	5.74
30 010011	0.22	0.01	1.37	0.91	-0.26	0.61	0.08	0.08	-0.03	0.18	0.59	10.31	0.23	0.66	1.21	1.36	1.39	3.50
31 010001	0.08	0.01	-0.78	0.48	-0.14	0.32	0.04	0.04	-0.01	0.09	-1.06	8.50	0.12	0.35	-0.69	0.46	0.78	2.17
32 010000	0.28	0.02	2.30	1.10	-0.32	0.73	0.10	0.10	-0.04	0.21	1.31	11.09	0.28	0.79	2.03	1.74	1.65	4.08
33 110000	0.45	0.03	0.55	2.18	-0.63	1.46	0.20	0.20	-0.07	0.42	2.24	17.20	0.55	1.58	0.48	2.79	3.43	9.13
34 110001	0.21	0.02	-2.56	1.40	-0.40	0.94	0.13	0.13	-0.05	0.27	-0.40	13.76	0.36	1.01	-2.26	1.31	2.30	6.53
35 110011	0.41	0.03	0.03	2.05	-0.59	1.37	0.19	0.19	-0.07	0.40	1.80	16.63	0.52	1.48	0.03	2.54	3.24	8.70
36 110010	0.70	0.04	3.81	3.01	-0.86	2.01	0.28	0.28	-0.10	0.58	5.01	20.80	0.76	2.17	3.36	4.34	4.51	11.86
37 110110	0.37	0.03	-0.53	1.91	-0.55	1.28	0.18	0.18	-0.07	0.37	3.69	6.62	0.48	1.38	-0.46	2.27	3.03	8.33
38 110111	0.13	0.02	-3.56	1.15	-0.33	0.77	0.11	0.11	-0.04	0.22	0.84	4.37	0.29	0.83	-3.13	0.83	1.93	5.78
39 110101	-0.01	0.01	-5.43	0.68	-0.19	0.45	0.06	0.06	-0.02	0.13	-0.92	2.97	0.17	0.49	-4.78	-0.07	1.25	4.21
40 110100	0.19	0.02	-2.86	1.33	-0.38	0.89	0.12	0.12	-0.05	0.25	1.50	4.89	0.33	0.95	-2.52	1.16	2.19	6.37
41 111100	-0.02	0.01	-5.55	0.64	-0.18	0.43	0.06	0.06	-0.02	0.12	0.92	-4.86	0.16	0.46	-4.89	-0.13	1.21	4.18
42 111101	-0.18	0.00	-7.65	0.12	-0.03	0.08	0.01	0.01	-0.01	0.02	-1.32	-5.36	0.03	0.08	-6.74	-1.13	0.45	2.41
43 111111	-0.08	0.01	-6.31	0.45	-0.13	0.31	0.04	0.04	-0.02	0.08	0.11	-5.04	0.11	0.32	-5.56	-0.49	0.93	3.54
44 111110	0.11	0.02	-3.92	1.06	-0.30	0.71	0.10	0.10	-0.04	0.20	2.67	-4.47	0.26	0.76	-3.45	0.65	1.80	5.56
45 111010	0.34	0.03	-0.84	1.83	-0.52	1.23	0.17	0.17	-0.06	0.35	3.60	5.60	0.46	1.32	-0.74	2.12	2.92	8.07
46 111011	0.12	0.02	-3.70	1.11	-0.32	0.75	0.10	0.10	-0.04	0.21	0.81	3.88	0.28	0.80	-3.26	0.76	1.88	5.66
47 111001	-0.01	0.01	-5.48	0.67	-0.19	0.44	0.06	0.06	-0.02	0.13	-0.93	2.81	0.17	0.48	-4.82	-0.09	1.24	4.17
48 111000	0.18	0.02	-3.02	1.28	-0.37	0.85	0.12	0.12	-0.04	0.25	1.47	4.28	0.22	0.92	-2.66	1.08	2.13	6.23
49 101000	0.01	0.00	2.02	-0.24	0.07	-0.16	-0.02	-0.02	0.01	-0.05	0.16	-0.24	-0.06	-0.17	1.78	0.04	-0.44	-1.51
50 101001	-0.14	-0.01	-0.83	-0.60	0.17	-0.41	-0.06	-0.06	0.02	-0.12	-1.83	-1.01	-0.15	-0.43	-0.73	-0.88	-0.92	-2.40
51 101011	-0.07	-0.01	0.63	-0.42	0.12	-0.28	-0.04	-0.04	0.01	-0.08	-0.81	-0.61	-0.10	-0.30	0.56	-0.41	-0.68	-1.95
52 101010	0.10	0.00	3.76	-0.01	0.00	-0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	1.38	0.23	0.00	-0.01	3.31	0.61	-0.15	-0.97
53 101110	-0.04	-0.01	1.08	-0.36	0.10	-0.24	-0.03	-0.03	0.01	-0.07	0.97	-6.30	-0.09	-0.26	0.95	-0.27	-0.60	-1.75
54 101111	-0.19	-0.01	-1.75	-0.72	0.21	-0.48	-0.07	-0.07	0.02	-0.14	-1.13	-6.59	-0.18	-0.52	-1.54	-1.18	-1.08	-2.63
55 101101	-0.25	-0.01	-2.96	-0.88	0.25	-0.59	-0.08	-0.08	0.03	-0.17	-2.02	-6.71	-0.22	-0.63	-2.60	-1.57	-1.28	-3.01
56 101100	-0.12	-0.01	-0.36	-0.54	0.16	-0.36	-0.05	-0.05	0.02	-0.11	-0.10	-6.45	-0.14	-0.39	-0.32	-0.73	-0.85	-2.20
57 100100	-0.03	0.00	1.34	-0.33	0.09	-0.22	-0.03	-0.03	0.01	-0.06	0.09	-2.02	-0.08	-0.23	1.18	-0.18	-0.56	-1.71
58 100101	-0.18	-0.01	-1.51	-0.69	0.20	-0.46	-0.06	-0.06	0.02	-0.13	-1.09	-2.84	-0.17	-0.50	-1.33	-1.10	-1.04	-2.59
59 100111	-0.10	-0.01	-0.09	-0.51	0.15	-0.34	-0.05	-0.05	0.02	-0.10	-0.91	-2.43	-0.13	-0.37	-0.08	-0.64	-0.80	-2.15
60 100110	0.06	0.00	3.04	-0.11	0.03	-0.07	-0.01	-0.01	0.00	-0.02	1.27	-1.53	-0.03	-0.08	2.68	0.37	-0.27	-1.18
61 100010	0.22	0.00	6.13	0.29	-0.00	0.19	0.03	0.03	-0.01	0.06	1.75	5.97	0.08	0.21	5.40	1.38	0.25	-0.29
62 100011	0.04	0.00	2.63	-0.16	0.04	-0.11	-0.02	-0.02	0.01	-0.03	-0.54	4.38	-0.04	-0.11	2.32	0.24	-0.34	-1.37
63 100001	-0.05	-0.01	0.89	-0.38	0.11	-0.26	-0.04	-0.04	0.01	-0.07	-1.67	3.59	-0.09	-0.27	0.78	-0.52	-0.63	-1.91
64 100000	0.11	0.00	4.04	0.02	-0.01	0.01	0.00	0.00	0.00	0.01	0.39	5.02	0.01	0.02	3.56	0.70	-0.10	-0.93



Kuvio 4.
 Kulmapistetarkastelua
 ($\Delta lase, \Delta mg$)-tasossa

Kuviossa 4 (s. 126) on esitetty kulmapistetarkastelun projek-
tio (Δ_{iasc} , Δ_{mg})-koordinaatistossa. Kuvio koostuu peruskuvios-
ta, jota voisi kutsua (Δ_{iasc} , Δ_{mg})-havaintopisteiden sironta-
kuvioksi, sekä kolmesta kommenttikuvioista, joissa peruskuvion
havaintopisteitä on eri tavoin yhdistelty.

Tarkastellaan esimerkkinä peruskuvion alla olevaa kommentti-
kuviota. Siinä on 14 katkoviivoin piirrettyä suoraa, jotka
kaikki yhdistävät neljä havaintopistettä toisiinsa, sekä kaksi
samaan kategoriaan kuuluvaa reunaviivan osaa (havaintopisteet
4, 61, 29 ja 36 sekä pisteet 10, 55, 23 ja 42 yhdistävät suorat).
Kukin näistä kuudestatoista neljän pisteen suorasta liittyy
tapaukseen, jossa yhden yhtälön (tässä tavaratuontiyhtälön)
parametrien sallitaan varioida sovitulla tavalla, mutta mui-
den yhtälöiden parametrit on kiinnitetty. Mahdollisia kiinni-
tystapoja on tässä esimerkissä juuri 16 (neljä parametria, joil-
la kullakin kaksi mahdollista arvoa). Esimerkiksi pisteet 4,
61, 29 ja 36 yhdistävä suora liittyy kiinnitykseen, jossa
 $\gamma_{cpr, wzd}$ on ylärajallaan, $\gamma_{cpr, DU}$ on alarajallaan, $\gamma_{iasc, yn}$ on
ylärajallaan ja $\gamma_{iasc, z}$ on ylärajallaan.

Kahdessa muussa kommenttikuviossa havaintopisteitä on yhdistel-
ty vastaavalla tavalla kulutusyhtälön ja investointiyhtälön
näkökulmasta katsottuina.

Kaikille kuvion 4 osille on yhteistä pisteet 4, 36, 34, 42, 10
ja 12 yhdistävä reunaviiva. Voidaan osoittaa, että po. reuna
rajaa tarkastelun "käyvän alueen" siinä mielessä, että millä

tahansa sivun 122 epäyhtälöt täyttävällä mallin muuttuvien parametrien arvojen valinnalla päädytään malliin, jonka ratkaisun poikkeama perusratkaisusta projisoituu piirretyn monikulmion sisäpuolelle. Käypä alue on tässä tapauksessa konvekksi. Kyseessä on erikoistapaus, sillä alueen konveksisuudesta ei yleisesti ole mitään takeita.

Kuvion 4 myötä on itse asiassa päädytty Rossierin "geometrisen lähestymistavan" yhteen tyyppikysymykseen: miten löytää lineaarisen yhtälösystemin ($Ay = x$) ratkaisun ($y = A^{-1}x$) muutoksen käyvän alueen rajat, kun mallin ratkaisua verrataan johonkin perusratkaisuun ($\hat{y} = A_0^{-1}x$) ja kerroinmatriisin A annetaan varioida sallituissa rajoissa ($\underline{A} \leq A \leq \bar{A}$). Erityisesti ollaan kiinnostuneita po. käyvän alueen

$$y = \{\Delta y \mid \Delta y = (A^{-1} - A_0^{-1})x, \underline{A} \leq A \leq \bar{A}\}$$

mielivaltaisen tasoprojektion $(\Delta y_i, \Delta y_j)$ rajoista.

Merkitsemällä $A = \Gamma$ ja $x = Bz + d$ päädytään alkuperäiseen notaatioon ja kysymyksenasetteluun, jossa ollaan kiinnostuneita vain endogeenisten muuttujien kerroinmatriisin muutosten vaikutuksista. Yleisemmin voidaan ajatella, että systeemissä $Ay = x$ onkin kyse alkuperäisen mallin *kanonisesta muodosta*

$$\begin{bmatrix} \Gamma & B \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y \\ -z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} d \\ -z^0 \end{bmatrix},$$

vrt. kaava (104), ja että A -matriisin muutokset voivat niin

ollen tarkoittaa myös eksogeenisten muuttujien kerroinmat-
riisin muutoksia.

Kuvion 4 reunaviivan piirtämiseksi käytiin läpi po. tarkas-
telun kaikkiin 64 kulmapisteeseen liittyvät ($\Delta i_{asc}, \Delta m_g$)-
havainnot. Mikäli tarkastelussa olisi mukana esimerkiksi
kaksinkertainen määrä muuttuvia parametreja, $K = 12$, olisi
kaikkien kulmapisteiden lukumäärä jo $2^{12} = 4096$. On selvää,
että reunaviivan jäljittäminen käymällä aina ensin läpi
kaikki kulmapisteet ei enää tule kyseeseen käytännön ratkai-
sumenetelmänä, kun muuttuvien parametrien lukumäärä alkaa
kasvaa suureksi.

Kuitenkin esim. Ritschard ja Rossier (1980) lähestyvät ongel-
maa nimenomaan kaikkien kulmapisteiden läpikäynnin kautta.
Po. viitteessä kiinnitetään huomiota tehtävän laskennalli-
seen raskauteen, mutta varsinaista algoritmista vastausta
tähän ongelmaan ei anneta. Projektio-ongelmaa lieneekin lupa
pitää verraten hankalana yleisessä muodossaan esitettynä.

Alustavat kokeilut antavat kuitenkin aiheen väittää, että
tehtävä lienee sittenkin kohtuullisen kevyesti hallittavissa,
kun otetaan käyttöön edellä esitellyt laskennalliset apu-
välineet. Ongelman ratkaisemiseksi kehitetty algoritmi ei
ole vielä täysin esittelykunnossa, mutta pari luonnehdintaa
siitä kannattaa jo tässä yhteydessä antaa. Menetelmä perus-
tuu eräänlaiseen apurivitekniikkaan, jonka perusidea onluet-
tavissa kaavasta (120). Siirtyminen käyvän alueen reunalla

nurkkapisteestä toiseen (esim. pisteestä 4 pisteeseen 36 ja edelleen pisteisiin 34, 42 jne. kuviossa 4) voidaan nimittäin toteuttaa yksinkertaisesti sarjana vaihto-operaatioita sopivasti laajennetussa mallikaaviossa.

Menetelmän pulmakohchia ovat rajalle pääseminen ja siellä pysyminen eli tekniseltä kannalta oikean vaihto-operaatiojonon valinta: osoittautui helpoksi keksiä intuitiivisestikin luontevat valintakriteerit, jotka näyttävät läpikäytyjen esimerkkien valossa toimivan moitteettomasti, mutta kriteerien yleispätevyyden todistaminen on osoittautunut varsin visaiseksi tehtäväksi. Mainitun rajankäyntialgoritmin edelleen kehittäminen näyttää joka tapauksessa muodostavan kiinnostavimman näköpiirissä olevan tehtävän tämän työn mahdollisia jatkotutkimuksia ajatellen.

KIRJALLISUUSLUETTELO

- DEMPSTER, A.P. (1969): *Elements of Continuous Multivariate Analysis*, Reading, Mass., Addison-Wesley.
- FADDEJEW, D.K. & FADDEJEW, W.N. (1964): *Numerische Methoden der Linearen Algebra*. Berlin, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften.
- HOUSEHOLDER, A.S. (1964): *The Theory of Matrices in Numerical Analysis*. New York, Dover.
- PYLKKÄNEN, E. (1980): *ETLAn kokonaistaloudellisen mallin impulssivasteista*. Elinkeinoelämän Tutkimuslaitos, julkaisematon moniste.
- RITSCHARD, G. & ROSSIER, E. (1980): *Qualitative and Geometric Methods for Large Econometric Models*. *Cahiers du Department d'économétrie*, No. 80.08, Université de Genève.
- SHERMAN, J. & MORRISON, W.J. (1950): Adjustment of an inverse matrix corresponding to a change in one element of a given matrix. *Annals of Mathematical Statistics*, Vol. XXI, s. 124-127.
- VAJANNE, H., PYLKKÄNEN, E. & SALMI, K. (1980): *ETLAn kokonaistaloudellisen mallin ohjelmistokuvaus*. Helsinki, Elinkeinoelämän Tutkimuslaitos, C:19.
- VAJANNE, H. & VARTIA, Y. (1978): *ETLAn suhdannemallin iteratiivinen ratkaisumenetelmä*. Helsinki, Elinkeinoelämän Tutkimuslaitoksen keskusteluaiheita, no. 19.
- VARTIA, P.L.I. (1974): *An Econometric Model for Analyzing and Forecasting Short-Term Fluctuations in the Finnish Economy*, Helsinki, Elinkeinoelämän Tutkimuslaitos, A:2.
- VARTIA, P.L.I. (1975): *Malli ei ole mekaano*. *Kansantaloudellinen aikakauskirja* 1975:1.
- VALIAHO, H. (1969): *A Synthetic Approach to Stepwise Regression Analysis*. *Commentationes Physico-Mathematicae*, Vol. 34, s. 91-132.
- VALIAHO, H. (1970): *The Non-diagonal Pivotal Operation and its Application to Linear Programming*. *Commentationes Physico-Mathematicae*, Vol. 40, s. 163-174.
- VALIAHO, H. (1981): *Lineaarialgebra*. Helsinki, Gaudeamus.

ETLAN KOKONAISTALOUDELLISEN MALLIN MUUTTUJIEN SYMBOLIT, VERSIO 1.9.1981

Mallin muuttujat liittyvät seuraaviin asioihin	Arvo	Määrä	Hinta
<u>KULUTUS</u>			
Kokonaiskulutus ¹⁾	C 23	c 32	p_c 43
Yksityinen kulutus	C_{pr} 15	c_{pr} 1	p_{cpr} 10
Julkinen kulutus	C_g 16	c_g 13	p_{cg} 13
<u>INVESTOINNIT</u>			
Kokonaisinvestoinnit	I 24	i 34	p_i 44
Yksityiset investoinnit	I_{pr} 17	i_{pr} 33	p_{ipr} 11
Yksityiset asuinrakennusinvestoinnit		i_{as} 16	
Yksityiset muut kuin asuinrak.invest.		i_{asc} 2	
Julkiset investoinnit	I_g 18	i_g 14	p_{ig} 14
Varastojen muutos ²⁾	N 4	\underline{n} 15	
<u>JULKINEN KYSYNTÄ</u>			
Julkisen sektorin kysyntä	G 25	g 35	p_g 45
<u>ULKOMAANKAUPPA</u>			
Kokonaismyyni	X 27	x 37	p_x 46
Tavaravienti	X_g 26	x_g 36	p_{xg} 70
Tavaravienti (ulkom. valuutassa)			p_{xgd} 12
Länsitavaravienti	X_{gw} 19	x_{gw} 5	p_{xg} 70
Itätavaravienti	X_e 68	x_e 20	p_{xg} 70
Itätavaravienti (ulkom. valuutassa)	X_{ed} 6		
Palvelusten vienti	X_s 69	\underline{x}_s 8	
Palvelusten vienti (ulkom. valuutassa)	X_{sd} 7		
Viennin kysyntätekijä		\underline{m}_w 3	
Kilpaileva vienti (ulkom. valuutassa)			p'_{xd} 5
Kokonaistuonti	M 28	m 38	p_m 47
Tavaratuonti	M_g 21	m_g 6	p_{mg} 71
Tavaratuonti (ulkom. valuutassa)			p_{mgd} 9
Palvelusten tuonti	M_s 22	\underline{m}_s 11	p_{ms} 72
Palvelusten tuonti (ulkom. valuutassa)			p_{msd} 10
Valuuttakurssit			\underline{er} 2
Vaihtotaseen ylijäämä ³⁾	E 73		
Nettotuotantotehtävät ulkomailta ⁴⁾	\underline{S} 12		
<u>KOKONAISKYSYNTÄ</u>			
Kokonaiskysyntä	D 30	d 40	
Kokonaiskysyntä - varastot	D' 29	d' 39	$p_{d'}$ 48

Mallin muuttujat liittyvät seuraaviin asioihin	Arvo	Määrä	Hinta
<u>TUOTANTO</u>			
Bruttokansantuote	Y 31	y 41	p_y 49
Bruttokansantuote - varastot		y' 42	
Kotimaiset tuotannontekijätulot	Y_{nfc} 52		
Käyttämättömän kapasiteetin muutos ⁵⁾		$\Delta \tilde{GAP}$ 74	
<u>TULOT</u>			
Kansantulo	NI 53		
Muut kuin palkkatulot	Z 56		
Kotital. käytettävissä oleva tulo	$(W+Z)^D$ 50		
Julkisyht. käytettävissä oleva tulo	$(W+G)^D$ 51		
Yrit. käytett. oleva tulo (yrit. säästöt)	S_f 58		
Julkisyht. omaisuus- ja yrittäjätulot ⁶⁾	O_1 26		
Kotitalouksien tulot omaisuudesta ⁶⁾	O_{12} 36		
Voittoa tavoittelem. yht. omaisuus- ja yrittäjätulot, netto ⁶⁾	O_{17} 40		
Maatalouden yrittäjätulot	YEH_1 23		
Metsätalouden yrittäjätulot	YEH_2 24		
Muut yrittäjätulot	YEH_3 25		
Yritysten voittomarginaali ⁷⁾			K 67
<u>TULONSIIRROT</u>			
Muut tulonsiirrot kotital. → julk.yht. ⁸⁾	O_6 29		
Muut tulonsiirrot yrit. → julk.yht. ⁸⁾	O_{61} 30		
Muut tulonsiirrot julk.yht. → kotital. ⁸⁾	O_7 31		
Muut tulonsiirrot julk.yht. → yrit. ⁸⁾	O_{71} 32		
Julkisyht. vähinkovakuutusmaksut, netto ⁸⁾	O_{14} 37		
Kotital. vähinkovakuutusmaksut, netto ⁸⁾	O_{15} 38		
Tulonsiirrot yrit. → kotital., netto ⁸⁾	O_{16} 39		
Kotital. tulonsiirrot ulkomaille ⁸⁾	O_8 33		
Tulonsiirrot ulkomailta kotit. ⁸⁾	O_9 34		
Julk.yht. tulonsiirrot ulkomailta, netto ⁸⁾	O_{11} 35		
Muut tulonsiirrot ulkomailta, netto ⁸⁾	O_{18} 41		
Tukipalkkiot	<u>SUB</u> 18		

Mallin muuttujat liittyvät seuraaviin asioihin	Arvo	Määrä	Hinta
<u>PALKAT</u>			
Koko kansant. palkkasumma (ml. sotu)	W	55	
Koko kansant. palkkasumma (pl. sotu)	W _s	54	
Palkansaajien ansiotaso			w 9
Yksikkötyökustannukset			ULC 63
Yksikkötyökustannukset (H)			H 66
Kilp.yksikkötyökust. (ulkom.valuutassa)			$\frac{ULC'}{ULC^d}$ 4
Kilp.yksikkötyökust. (kotim.valuutassa)			ULC ^d 64
Suhteelliset yksikkötyökustannukset			ULC _r 65
Työnantajain sos.kulujen kohtaanto ⁹⁾	k ₁	21	
Kotital. maksamien sos.turvamaksujen kohtaanto ⁹⁾	k ₂	22	
Kotital. maksamat sosiaaliturvamaksut	O ₅₂	62	
<u>TYÖPANOS</u>			
Koko kansantalouden ansiotyöpanos			a 7
Työttömyysasteen muutos ¹⁰⁾	Δ \tilde{U}	8	
<u>VEROTUS</u>			
Yritysten välittömät verot ¹¹⁾	O ₃	28	
Kotitalouksien välittömät verot	O ₅₁	61	
Välilliset verot	T _i	60	
Välillisten verojen kohtaanto ¹²⁾	T' _i	20	
Välill. verot - tukipalkk., kohtaanto ¹²⁾	T' _{is}	19	
<u>SÄÄSTÄMINEN</u>			
Kotitalouksien säästäminen	S _{pr}	57	
Julkisen hallinnon säästäminen	S _g	59	
<u>MUITA MUUTTUJIA</u>			
Kiinteän pääoman poistot	F	17	
Julkisen velan korko ¹³⁾	O ₂	27	

Huomautuksia:

- 1) Muuttujat ovat (ellei erikseen toisin mainita) kahden peräkkäisen kalenterivuoden tilanteita vertailevia prosenttimuutoksia. Suuret kirjaimet viittaavat yleensä arvosarjoihin: esim. $C = 100 \frac{\Delta \tilde{C}}{\tilde{C}_{-1}}$ on kulutuksen arvon prosenttimuutos, jossa \tilde{C} ja \tilde{C}_{-1} ovat kulutuksen arvo käyvin hinnoin tarkasteluvuonna ja sitä edeltävänä vuonna (muuttujasymbolin päällä oleva tilde (\sim) viittaa vastaavaan tasomuuttuunaan). Volyymimuuttujaa merkitään pienellä kirjaimella: esim. $c = 100 \frac{\Delta \tilde{c}}{\tilde{c}_{-1}}$ on kulutuksen volyymin, ts. kiinteähintaisen arvon \tilde{c} prosenttimuutos. Hintamuuttujia merkitään tavallisesti p-symbolilla ja sopivalla alaindeksillä: esim. $p_c = 100 \frac{\Delta \tilde{p}_c}{\tilde{p}_{c,-1}}$ on kulutuksen hintaindeksin \tilde{p}_c prosenttimuutos. Ks. myös P. Vartia (1974, s. 21-22). Muuttujasymboleita seuraavat numerot ovat endogeenisten tai eksogeenisten muuttujien järjestysnumeroita matriiseissa A_t ja B_t . Eksogeeniset muuttujat on ilmaistu taulukossa alleviivauksella. Viivästettyjä muuttujia ei ole tässä lueteltu.
- 2) N ja n eivät ole prosenttimuutoksia vaan muutoksia suhteessa kokonaiskysyntään (pl. varastojen muutos): $N = 100 \frac{\Delta \tilde{N}}{\tilde{D}'_{-1}}$, $n = 100 \frac{\Delta \tilde{n}}{\tilde{d}'_{-1}}$.
- 3) E ei ole prosenttimuutos vaan muutos suhteessa bruttokansantuotteeseen: $E = 100 \frac{\Delta \tilde{E}}{\tilde{Y}_{-1}}$.
- 4) S ei ole prosenttimuutos vaan muutos suhteessa kotimaisiin tuotannontekijätuloihin: $S = 100 \frac{\Delta \tilde{S}}{\tilde{Y}_{nfc,-1}}$.
- 5) $\Delta \tilde{GAP}$ ei ole prosenttimuutos, ks. yhtälö 74.
- 6) O_1 , O_{12} ja O_{17} eivät ole prosenttimuutoksia vaan muutoksia suhteessa kansantuloon: $O_i = 100 \frac{\Delta \tilde{O}_i}{\tilde{NI}_{-1}}$, $i = 1, 12, 17$.
- 7) K ei ole prosenttimuutos vaan tulo-osuuden $100 \frac{(\tilde{Z} + \tilde{F})}{\tilde{D}'}$ muutoksen $100 \Delta [(\tilde{Z} + \tilde{F}) / \tilde{D}']$ approksimaatio, ks. yhtälö 67 ja vrt. P. Vartia (1974, s. 131).
- 8) O_6 , O_{61} , O_7 , O_{71} , O_{14} , O_{15} , O_{16} , O_8 , O_9 , O_{11} ja O_{18} eivät ole prosenttimuutoksia vaan muutoksia suhteessa kansantuloon: $O_i = 100 \frac{\Delta \tilde{O}_i}{\tilde{NI}_{-1}}$, $i = 6, 61, 7, 71, 14, 15, 16, 8, 9, 11, 18$.
- 9) k_1 ja k_2 ovat seuraavalla tavalla laskettuja prosenttimuutoksia:
 $k_1 = 100 \frac{\Delta (\tilde{W} / \tilde{W}_S)}{(\tilde{W} / \tilde{W}_S)_{-1}}$, $k_2 = 100 \frac{\Delta (\tilde{O}_{52} / \tilde{W}_S)}{(\tilde{O}_{52} / \tilde{W}_S)_{-1}}$.
- 10) $\Delta \tilde{U}$ ei ole prosenttimuutos: $\Delta \tilde{U} = \tilde{U} - \tilde{U}_{-1}$.
- 11) O_3 ei ole prosenttimuutos vaan muutos suhteessa kansantuloon: $O_3 = 100 \frac{\Delta \tilde{O}_3}{\tilde{NI}_{-1}}$.
- 12) T'_i ja T'_{iS} ovat osuuksien $\tilde{T}'_i = \tilde{T}_i / \tilde{D}'$ ja $\tilde{T}'_{iS} = (\tilde{T}_i - \tilde{SÜB}) / \tilde{D}'$ prosenttimuutoksia.
- 13) O_2 ei ole prosenttimuutos vaan muutos suhteessa kansantuloon:
 $O_2 = 100 \frac{\Delta \tilde{O}_2}{\tilde{NI}_{-1}}$.

Mallin muuttujat liittyvät seuraaviin asioihin	Arvo	Määrä	Hinta
<u>KULUTUS</u>			
Kokonaiskulutus ¹⁾	C 23	c 32	p_c 43
Yksityinen kulutus	C_{pr} 15	c_{pr} 1	p_{cpr} 10
Julkinen kulutus	C_g 16	c_g 13	p_{cg} 13
<u>INVESTOINNIT</u>			
Kokonaisinvestoinnit	I 24	i 34	p_i 44
Yksityiset investoinnit	I_{pr} 17	i_{pr} 33	p_{ipr} 11
Yksityiset asuinrakennusinvestoinnit		i_{as} 16	
Yksityiset muut kuin asuinrak.invest.		i_{asc} 2	
Julkiset investoinnit	I_g 18	i_g 14	p_{ig} 14
Varastojen muutos ²⁾	N 4	n 15	
<u>JULKINEN KYSYNTÄ</u>			
Julkisen sektorin kysyntä	G 25	g 35	p_g 45
<u>ULKOMAANKAUPPA</u>			
Kokonaisvienti	X 27	x 37	p_x 46
Tavaravienti	X_g 26	x_g 36	p_{xg} 70
Tavaravienti (ulkom. valuutassa)			p_{xgd} 12
Länsitavaravienti	X_{gw} 19	x_{gw} 5	p_{xg} 70
Itätavaravienti	X_e 68	x_e 20	p_{xg} 70
Itätavaravienti (ulkom. valuutassa)	X_{ed} 6		
Palvelusten vienti	X_s 69	x_s 8	
Palvelusten vienti (ulkom. valuutassa)	X_{sd} 7		
Viennin kysyntätekijä		m_w 3	
Kilpaileva vienti (ulkom. valuutassa)			p'_{xd} 5
Kokonaistuonti	M 28	m 38	p_m 47
Tavaratuonti	M_g 21	m_g 6	p_{mg} 71
Tavaratuonti (ulkom. valuutassa)			p_{mgd} 9
Palvelusten tuonti	M_s 22	m_s 11	p_{ms} 72
Palvelusten tuonti (ulkom. valuutassa)			p_{msd} 10
Valuuttakurssit			er 2
Vaihtotaseen ylijäämä ³⁾	E 73		
Nettotuotannontekijätulot ulkomailta ⁴⁾	S 12		
<u>KOKONAISKYSYNTÄ</u>			
Kokonaiskysyntä	D 30	d 40	
Kokonaiskysyntä - varastot	D' 29	d' 39	$p_{d'}$ 48

Mallin muuttujat liittyvät seuraaviin asioihin	Arvo	Määrä	Hinta
<u>TUOTANTO</u>			
Bruttokansantuote	Y 31	y 41	p_y 49
Bruttokansantuote - varastot		y' 42	
Kotimaiset tuotannontekijätulot	Y_{nfc} 52		
Käyttämättömän kapasiteetin muutos ⁵⁾		$\Delta G\tilde{A}P$ 74	
<u>TULOT</u>			
Kansantulo	NI 53		
Muut kuin palkkatulot	Z 56		
Kotital. käytettävissä oleva tulo	$(W+Z)^D$ 50		
Julkisyht. käytettävissä oleva tulo	$(W+G)^D$ 51		
Yrit. käytett. oleva tulo (yrit. säästöt)	S_f 58		
Julkisyht. omaisuus- ja yrittäjätulot ⁶⁾	Q_1 26		
Kotitalouksien tulot omaisuudesta ⁶⁾	Q_{12} 36		
Voittoa tavoittelem. yht. omaisuus- ja yrittäjätulot, netto ⁶⁾	Q_{17} 40		
Maatalouden yrittäjätulot	YEH_1 23		
Metsätalouden yrittäjätulot	YEH_2 24		
Muut yrittäjätulot	YEH_3 25		
Yritysten voittomarginaali ⁷⁾			K 67
<u>TULONSIIRROT</u>			
Muut tulonsiirrot kotital. → julk.yht. ⁸⁾	Q_6 29		
Muut tulonsiirrot yrit. → julk.yht. ⁸⁾	Q_{61} 30		
Muut tulonsiirrot julk.yht. → kotital. ⁸⁾	Q_7 31		
Muut tulonsiirrot julk.yht. → yrit. ⁸⁾	Q_{71} 32		
Julkisyht. vahinkovakuutusmaksut, netto ⁸⁾	Q_{14} 37		
Kotital. vahinkovakuutusmaksut, netto ⁸⁾	Q_{15} 38		
Tulonsiirrot yrit. → kotital., netto ⁸⁾	Q_{16} 39		
Kotital. tulonsiirrot ulkomaille ⁸⁾	Q_8 33		
Tulonsiirrot ulkomailta kotit. ⁸⁾	Q_9 34		
Julk.yht. tulonsiirrot ulkomailta, netto ⁸⁾	Q_{11} 35		
Muut tulonsiirrot ulkomailta, netto ⁸⁾	Q_{18} 41		
Tukipalkkiot	<u>SUB</u> 18		

Mallin muuttujat liittyvät seuraaviin asioihin	Arvo	Määrä	Hinta
<u>PALKAT</u>			
Koko kansant. palkkasumma (ml. sotu)	W	55	
Koko kansant. palkkasumma (pl. sotu)	W _s	54	
Palkansaajien ansiotaso			w 9
Yksikkötyökustannukset			ULC 63
Yksikkötyökustannukset (H)			H 66
Kilp.yksikkötyökust. (ulkom.valuutassa)			$\frac{ULC'}{d}$ 4
Kilp.yksikkötyökust. (kotim.valuutassa)			ULC ^d 64
Suhteelliset yksikkötyökustannukset			ULC _r 65
Työnantajain sos.kulujen kohtaanto ⁹⁾	k ₁	21	
Kotital. maksamien sos.turvamaksujen kohtaanto ⁹⁾	k ₂	22	
Kotital. maksamat sosiaaliturvamaksut	O ₅₂	62	
<u>TYÖPANOS</u>			
Koko kansantalouden ansiotyöpanos			a 7
Työttömyysasteen muutos ¹⁰⁾	$\Delta\tilde{U}$	8	
<u>VEROTUS</u>			
Yritysten välittömät verot ¹¹⁾	O ₃	28	
Kotitalouksien välittömät verot	O ₅₁	61	
Välilliset verot	T _i	60	
Välillisten verojen kohtaanto ¹²⁾	T' _i	20	
Välill. verot - tukipalkk., kohtaanto ¹²⁾	T' _{is}	19	
<u>SÄÄSTÄMINEN</u>			
Kotitalouksien säästäminen	S _{pr}	57	
Julkisen hallinnon säästäminen	S _g	59	
<u>MUIITA MUUTTUJIA</u>			
Kiinteän pääoman poistot	F	17	
Julkisen velan korko ¹³⁾	O ₂	27	

Huomautuksia:

- 1) Muuttujat ovat (ellei erikseen toisin mainita) kahden peräkkäisen kalenterivuoden tilanteita vertailevia prosenttimuutoksia. Suuret kirjaimet viittaavat yleensä arvosarjoihin: esim. $C = 100 \frac{\Delta \tilde{C}}{\tilde{C}_{-1}}$ on kulutuksen arvon prosenttimuutos, jossa \tilde{C} ja \tilde{C}_{-1} ovat kulutuksen arvo käyvin hinnoin tarkasteluvuonna ja sitä edeltävänä vuonna (muuttujasymbolin päällä oleva tilde (\sim) viittaa vastaavaan tasomuuttujaan). Volyymimuuttujaa merkitään pienellä kirjaimella: esim. $c = 100 \frac{\Delta \tilde{c}}{\tilde{c}_{-1}}$ on kulutuksen volyymin, ts. kiinteähintaisen arvon \tilde{c} prosenttimuutos. Hintamuuttujia merkitään tavallisesti p-symbolilla ja sopivalla alaindeksillä: esim. $p_c = 100 \frac{\Delta \tilde{p}_c}{\tilde{p}_{c,-1}}$ on kulutuksen hintaindeksin \tilde{p}_c prosenttimuutos. Ks. myös P. Vartia (1974, s. 21-22). Muuttujasymboleita seuraavat numerot ovat endogeenisten tai eksogeenisten muuttujien järjestysnumeroita matriiseissa A_t ja B_t . Eksogeeniset muuttujat on ilmaistu taulukossa alleviivauksella. Viivästettyjä muuttujia ei ole tässä lueteltu.
- 2) N ja n eivät ole prosenttimuutoksia vaan muutoksia suhteessa kokonaiskysyntään (pl. varastojen muutos): $N = 100 \frac{\Delta \tilde{N}}{\tilde{D}'_{-1}}$, $n = 100 \frac{\Delta \tilde{n}}{\tilde{d}'_{-1}}$.
- 3) E ei ole prosenttimuutos vaan muutos suhteessa bruttokansantuotteeseen: $E = 100 \frac{\Delta \tilde{E}}{\tilde{Y}_{-1}}$.
- 4) S ei ole prosenttimuutos vaan muutos suhteessa kotimaisiin tuotannontekijätuloihin: $S = 100 \frac{\Delta \tilde{S}}{\tilde{Y}_{nfc,-1}}$.
- 5) $\Delta \tilde{GAP}$ ei ole prosenttimuutos, ks. yhtälö 74.
- 6) O_1 , O_{12} ja O_{17} eivät ole prosenttimuutoksia vaan muutoksia suhteessa kansantuloon: $O_i = 100 \frac{\Delta \tilde{O}_i}{\tilde{NI}_{-1}}$, $i = 1, 12, 17$.
- 7) K ei ole prosenttimuutos vaan tulo-osuuden $100 \frac{(\tilde{Z} + \tilde{F})}{\tilde{D}'}$ muutoksen $100 \Delta [(\tilde{Z} + \tilde{F})/\tilde{D}']$ approksimaatio, ks. yhtälö 67 ja vrt. P. Vartia (1974, s. 131)
- 8) O_6 , O_{61} , O_7 , O_{71} , O_{14} , O_{15} , O_{16} , O_8 , O_9 , O_{11} ja O_{18} eivät ole prosenttimuutoksia vaan muutoksia suhteessa kansantuloon: $O_i = 100 \frac{\Delta \tilde{O}_i}{\tilde{NI}_{-1}}$, $i = 6, 61, 7, 71, 14, 15, 16, 8, 9, 11, 18$.
- 9) k_1 ja k_2 ovat seuraavalla tavalla laskettuja prosenttimuutoksia: $k_1 = 100 \frac{\Delta (\tilde{W}/\tilde{W}_s)}{(\tilde{W}/\tilde{W}_s)_{-1}}$, $k_2 = 100 \frac{\Delta (\tilde{O}_{52}/\tilde{W}_s)}{(\tilde{O}_{52}/\tilde{W}_s)_{-1}}$.
- 10) $\Delta \tilde{U}$ ei ole prosenttimuutos: $\Delta \tilde{U} = \tilde{U} - \tilde{U}_{-1}$.
- 11) O_3 ei ole prosenttimuutos vaan muutos suhteessa kansantuloon: $O_3 = 100 \frac{\Delta \tilde{O}_3}{\tilde{NI}_{-1}}$.
- 12) T_1^i ja T_{1s}^i ovat osuuksien $\tilde{T}_1^i = \tilde{T}_1/\tilde{D}'$ ja $\tilde{T}_{1s}^i = (\tilde{T}_1 - \tilde{S}\tilde{U}B)/\tilde{D}'$ prosenttimuutoksia.
- 13) O_2 ei ole prosenttimuutos vaan muutos suhteessa kansantuloon: $O_2 = 100 \frac{\Delta \tilde{O}_2}{\tilde{NI}_{-1}}$.

MALLIN YHTÄLÖLUETTELO 1.9.1981

BEHAVIOURAL EQUATIONS

1. Domestic expenditure categories

$$1. c_{pr} = .365[(W+Z)^D - p_{cpr}] + .435[(W+Z)^D - c_{pr}]_{-1} - 2.407\tilde{U} + 2.389 + \underline{d}(1) + \underline{e}(1)$$

$$2. i_{asc} = 3.354\Delta y'_{-3/4} + .439[Z - p_{ipr}] + .397[Z - p_{ipr}]_{-1} + 1.628 + \underline{d}(2) + \underline{e}(2)$$

$$3. i_{as} = \underline{i}_{as} + \underline{d}(3) + \underline{e}(3)$$

$$4. N = .321\Delta d'_{-1/2} + .037\Delta p_{mg} - .369N_{-1} + .695 + \underline{d}(4) + \underline{e}(4)$$

2. Foreign sector

$$5. x_{gw} = 2.338\underline{m}_w - .520(p_{xgd} - p'_{xd}) - .828(p_{xgd} - p'_{xd})_{-1} - .308(p_{xgd} - p'_{xd})_{-2} - 3.172 + \underline{d}(5) + \underline{e}(5)$$

$$6. m_g = 1.924d' + 3.074N + .594(p_y - p_{mg})_{-1/3} + .334\Delta d' - 3.868 + \underline{d}(6) + \underline{e}(6)$$

3. Labour input and unemployment

$$7. a = .549y + .060y_{-1} + .049K - .881 + \underline{d}(7) + \underline{e}(7)$$

$$8. \tilde{U} = -.287a + .679 + \underline{d}(8) + \underline{e}(8)$$

4. Wages and prices

$$9. w = .562p_{cpr} + .900(y-a)_{-1/2} - .846\tilde{U} + .4(w_{-1} - .562p_{cpr,-1} + .846\tilde{U}_{-1}) + .074 + \underline{d}(9) + \underline{e}(9)$$

10. $p_{cpr} = .362H + .164p_{mg} + .207T'_{is} + 2.084 + d(10) + e(10)$
11. $p_{ipr} = .363H + .255p_{mg} + .155p_{ipr,-1} + 1.086 + d(11) + e(11)$
12. $p_{xgd} = .878p'_{xd} + .199ULC_r + .163p'_{xd,-1} + .049ULC_{r,-1} + .612 + d(12) + e(12)$
13. $p_{cg} = .757H + .060p_{mg} + .090p_{cg,-1} + 2.486 + d(13) + e(13)$
14. $p_{ig} = .812H + .208p_{mg} + .136p_{ig,-1} - .254 + d(14) + e(14)$

DEFINITIONAL EQUATIONS

1. Value-volume-price identities

15. $C_{pr} = c_{pr} + p_{cpr} + .01c_{pr}p_{cpr}$
16. $C_g = c_g + p_{cg} + .01c_gp_{cg}$
17. $I_{pr} = i_{pr} + p_{ipr} + .01i_{pr}p_{ipr}$
18. $I_g = i_g + p_{ig} + .01i_gp_{ig}$
19. $X_{gw} = x_{gw} + p_{xg} + .01x_{gw}p_{xg}$
20. $x_e = X_e - p_{xg} - .01x_e p_{xg}$
21. $M_g = m_g + p_{mg} + .01m_gp_{mg}$
22. $M_s = m_s + p_{ms} + .01m_sp_{ms}$

2. Value aggregates

23. $C = \left(\frac{\tilde{C}_{pr}}{\tilde{C}}\right)_{-1} C_{pr} + \left(\frac{\tilde{C}_g}{\tilde{C}}\right)_{-1} C_g$
24. $I = \left(\frac{\tilde{I}_{pr}}{\tilde{I}}\right)_{-1} I_{pr} + \left(\frac{\tilde{I}_g}{\tilde{I}}\right)_{-1} I_g$
25. $G = \left(\frac{\tilde{C}_g}{\tilde{G}}\right)_{-1} C_g + \left(\frac{\tilde{I}_g}{\tilde{G}}\right)_{-1} I_g$

$$26. X_g = \left(\frac{\tilde{X}_{gw}}{\tilde{X}_g}\right)_{-1} X_{gw} + \left(\frac{\tilde{X}_e}{\tilde{X}_g}\right)_{-1} X_e$$

$$27. X = \left(\frac{\tilde{X}_g}{\tilde{X}}\right)_{-1} X_g + \left(\frac{\tilde{X}_s}{\tilde{X}}\right)_{-1} X_s$$

$$28. M = \left(\frac{\tilde{M}_g}{\tilde{M}}\right)_{-1} M_g + \left(\frac{\tilde{M}_s}{\tilde{M}}\right)_{-1} M_s$$

$$29. D' = \left(\frac{\tilde{C}_{pr}}{\tilde{D}'}\right)_{-1} C_{pr} + \left(\frac{\tilde{I}_{pr}}{\tilde{D}'}\right)_{-1} I_{pr} + \left(\frac{\tilde{G}}{\tilde{D}'}\right)_{-1} G + \left(\frac{\tilde{X}}{\tilde{D}'}\right)_{-1} X$$

$$30. D = \left(\frac{\tilde{C}_{pr}}{\tilde{D}}\right)_{-1} C_{pr} + \left(\frac{\tilde{I}_{pr}}{\tilde{D}}\right)_{-1} I_{pr} + \left(\frac{\tilde{G}}{\tilde{D}}\right)_{-1} G + \left(\frac{\tilde{X}}{\tilde{D}}\right)_{-1} X + \left(\frac{\tilde{D}'}{\tilde{D}}\right)_{-1} N$$

$$31. Y = \left(\frac{\tilde{D}}{\tilde{Y}}\right)_{-1} D - \left(\frac{\tilde{M}}{\tilde{Y}}\right)_{-1} M$$

3. Volume aggregates

$$32. c = \left(\frac{\tilde{c}_{pr}}{\tilde{c}}\right)_{-1} c_{pr} + \left(\frac{\tilde{c}_g}{\tilde{c}}\right)_{-1} c_g$$

$$33. i_{pr} = \left(\frac{\tilde{i}_{asc}}{\tilde{i}_{pr}}\right)_{-1} i_{asc} + \left(\frac{\tilde{i}_{as}}{\tilde{i}_{pr}}\right)_{-1} i_{as}$$

$$34. i = \left(\frac{\tilde{i}_{pr}}{\tilde{i}}\right)_{-1} i_{pr} + \left(\frac{\tilde{i}_g}{\tilde{i}}\right)_{-1} i_g$$

$$35. g = \left(\frac{\tilde{c}_g}{\tilde{g}}\right)_{-1} c_g + \left(\frac{\tilde{i}_g}{\tilde{g}}\right)_{-1} i_g$$

$$36. x_g = \left(\frac{\tilde{x}_{gw}}{\tilde{x}_g}\right)_{-1} x_{gw} + \left(\frac{\tilde{x}_e}{\tilde{x}_g}\right)_{-1} x_e$$

$$37. x = \left(\frac{\tilde{x}_g}{\tilde{x}}\right)_{-1} x_g + \left(\frac{\tilde{x}_s}{\tilde{x}}\right)_{-1} x_s$$

$$38. m = \left(\frac{\tilde{m}_g}{\tilde{m}}\right)_{-1} m_g + \left(\frac{\tilde{m}_s}{\tilde{m}}\right)_{-1} m_s$$

$$39. d' = \left(\frac{\tilde{c}_{pr}}{\tilde{d}'}\right)_{-1} c_{pr} + \left(\frac{\tilde{i}_{pr}}{\tilde{d}'}\right)_{-1} i_{pr} + \left(\frac{\tilde{g}}{\tilde{d}'}\right)_{-1} g + \left(\frac{\tilde{x}}{\tilde{d}'}\right)_{-1} x$$

$$40. d = \left(\frac{\tilde{c}_{pr}}{\tilde{d}}\right)_{-1} c_{pr} + \left(\frac{\tilde{i}_{pr}}{\tilde{d}}\right)_{-1} i_{pr} + \left(\frac{\tilde{g}}{\tilde{d}}\right)_{-1} g + \left(\frac{\tilde{x}}{\tilde{d}}\right)_{-1} x + \left(\frac{\tilde{d}'}{\tilde{d}}\right)_{-1} n$$

$$41. y = \left(\frac{\tilde{d}}{\tilde{y}}\right)_{-1} d - \left(\frac{\tilde{m}}{\tilde{y}}\right)_{-1} m$$

$$42. y' = \left(\frac{\tilde{d}'}{\tilde{y}'}\right)_{-1} d' - \left(\frac{\tilde{m}}{\tilde{y}'}\right)_{-1} m$$

4. Price aggregates

$$43. p_c = C - c - .01cp_c$$

$$44. p_i = I - i - .01ip_i$$

$$45. p_g = G - g - .01gp_g$$

$$46. p_x = X - x - .01xp_x$$

$$47. p_m = M - m - .01mp_m$$

$$48. p_{d'} = D' - d' - .01d'p_{d'}$$

$$49. p_y = Y - y - .01yp_y$$

5. Incomes

$$\begin{aligned}
 50. (W+Z)^D &= \left(\frac{\tilde{W}}{(W+\tilde{Z})^D}\right)_{-1}W - \left(\frac{\tilde{O}_{51}}{(W+\tilde{Z})^D}\right)_{-1}O_{51} - \left(\frac{\tilde{O}_{52}}{(W+\tilde{Z})^D}\right)_{-1}O_{52} - \left(\frac{\tilde{NI}}{(W+\tilde{Z})^D}\right)_{-1}O_6 \\
 &+ \left(\frac{\tilde{NI}}{(W+\tilde{Z})^D}\right)_{-1}O_7 - \left(\frac{\tilde{NI}}{(W+\tilde{Z})^D}\right)_{-1}O_8 + \left(\frac{\tilde{NI}}{(W+\tilde{Z})^D}\right)_{-1}O_9 + \left(\frac{\tilde{NI}}{(W+\tilde{Z})^D}\right)_{-1}O_{12} \\
 &+ \left(\frac{\tilde{NI}}{(W+\tilde{Z})^D}\right)_{-1}O_{15} + \left(\frac{\tilde{NI}}{(W+\tilde{Z})^D}\right)_{-1}O_{16} + \left(\frac{\tilde{NI}}{(W+\tilde{Z})^D}\right)_{-1}O_{17} + \left(\frac{\tilde{YEH}_1}{(W+\tilde{Z})^D}\right)_{-1}YEH_1 \\
 &+ \left(\frac{\tilde{YEH}_2}{(W+\tilde{Z})^D}\right)_{-1}YEH_2 + \left(\frac{\tilde{YEH}_3}{(W+\tilde{Z})^D}\right)_{-1}YEH_3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 51. (W+G)^D &= \left(\frac{\tilde{NI}}{(W+\tilde{G})^D}\right)_{-1}O_1 - \left(\frac{\tilde{NI}}{(W+\tilde{G})^D}\right)_{-1}O_2 + \left(\frac{\tilde{NI}}{(W+\tilde{G})^D}\right)_{-1}O_3 + \left(\frac{\tilde{O}_{51}}{(W+\tilde{G})^D}\right)_{-1}O_{51} \\
 &+ \left(\frac{\tilde{O}_{52}}{(W+\tilde{G})^D}\right)_{-1}O_{52} + \left(\frac{\tilde{NI}}{(W+\tilde{G})^D}\right)_{-1}O_6 - \left(\frac{\tilde{NI}}{(W+\tilde{G})^D}\right)_{-1}O_7 + \left(\frac{\tilde{NI}}{(W+\tilde{G})^D}\right)_{-1}O_{11} \\
 &+ \left(\frac{\tilde{T}_i}{(W+\tilde{G})^D}\right)_{-1}T_i - \left(\frac{\tilde{SUB}}{(W+\tilde{G})^D}\right)_{-1}SUB + \left(\frac{\tilde{NI}}{(W+\tilde{G})^D}\right)_{-1}O_{61} - \left(\frac{\tilde{NI}}{(W+\tilde{G})^D}\right)_{-1}O_{71} \\
 &+ \left(\frac{\tilde{NI}}{(W+\tilde{G})^D}\right)_{-1}O_{14}
 \end{aligned}$$

$$52. Y_{nfc} = \left(\frac{\tilde{Y}}{\tilde{Y}_{nfc}}\right)_{-1}Y - \left(\frac{\tilde{F}}{\tilde{Y}_{nfc}}\right)_{-1}F - \left(\frac{\tilde{T}_i}{\tilde{Y}_{nfc}}\right)_{-1}T_i + \left(\frac{\tilde{SUB}}{\tilde{Y}_{nfc}}\right)_{-1}SUB$$

$$53. NI = \left(\frac{\tilde{Y}_{nfc}}{\tilde{NI}}\right)_{-1}Y_{nfc} + \left(\frac{\tilde{Y}_{nfc}}{\tilde{NI}}\right)_{-1}S + \left(\frac{\tilde{T}_i}{\tilde{NI}}\right)_{-1}T_i - \left(\frac{\tilde{SUB}}{\tilde{NI}}\right)_{-1}SUB$$

$$54. W_s = a + w + .01aw$$

$$55. W = W_s + k_1 + .01W_s k_1$$

$$56. Z = \left(\frac{\tilde{NI}}{\tilde{Z}}\right)_{-1}NI - \left(\frac{\tilde{W}}{\tilde{Z}}\right)_{-1}W - \left(\frac{\tilde{T}_i}{\tilde{Z}}\right)_{-1}T_i + \left(\frac{\tilde{SUB}}{\tilde{Z}}\right)_{-1}SUB$$

6. Sectoral saving

$$57. S_{pr} = \left(\frac{(W+Z)^D}{\tilde{S}_{pr}}\right)_{-1} (W+Z)^D - \left(\frac{\tilde{C}_{pr}}{\tilde{S}_{pr}}\right)_{-1} C_{pr}$$

$$58. S_f = \left(\frac{\tilde{NI}}{\tilde{S}_f}\right)_{-1} NI - \left(\frac{\tilde{NI}}{\tilde{S}_f}\right)_{-1} O_8 + \left(\frac{\tilde{NI}}{\tilde{S}_f}\right)_{-1} O_9 + \left(\frac{\tilde{NI}}{\tilde{S}_f}\right)_{-1} O_{11} + \left(\frac{\tilde{NI}}{\tilde{S}_f}\right)_{-1} O_{18} \\ - \left(\frac{(W+G)^D}{\tilde{S}_f}\right)_{-1} (W+G)^D - \left(\frac{(W+Z)^D}{\tilde{S}_f}\right)_{-1} (W+Z)^D$$

$$59. S_g = \left(\frac{(W+G)^D}{\tilde{S}_g}\right)_{-1} (W+G)^D - \left(\frac{\tilde{C}_g}{\tilde{S}_g}\right)_{-1} C_g$$

7. Taxes

$$60. T_i = D' + T'_i + .01D'T'_i$$

$$61. O_{51} = b_t W_s + a_t$$

$$62. O_{52} = W_s + k_2 + .01W_s k_2$$

8. Profit and margins

$$63. ULC = W - y - .01ULC_y$$

$$64. ULC' = \frac{ULC'_d}{d} + \frac{er}{r} + .01ULC'_d \frac{er}{r}$$

$$65. ULC_r = ULC - ULC' - .01ULC'ULC_r$$

$$66. H = w - (y - a)_{-1/2}$$

$$67. K = P_d' - \left(\frac{\tilde{W}_s}{\tilde{D}'}\right)_{-1} W - \left(\frac{\tilde{T}_i - \tilde{S}_{UB}}{\tilde{D}'}\right)_{-1} T'_i s - \left(\frac{\tilde{M}}{\tilde{D}'}\right)_{-1} P_m$$

9. Connections between domestic and foreign prices

$$68. X_e = X_{ed} + \underline{er} + .01 X_{ed} \underline{er}$$

$$69. X_s = X_{sd} + \underline{er} + .01 X_{sd} \underline{er}$$

$$70. p_{xg} = p_{xgd} + \underline{er} + .01 p_{xgd} \underline{er}$$

$$71. p_{mg} = p_{mgd} + \underline{er} + .01 p_{mgd} \underline{er}$$

$$72. p_{ms} = p_{msd} + \underline{er} + .01 p_{msd} \underline{er}$$

10. Current accounts

$$73. E = \left(\frac{\tilde{X}}{\tilde{Y}}\right)_{-1} X - \left(\frac{\tilde{M}}{\tilde{Y}}\right)_{-1} M - \left(\frac{\tilde{NI}}{\tilde{Y}}\right)_{-1} 0.8 + \left(\frac{\tilde{NI}}{\tilde{Y}}\right)_{-1} 0.9 + \left(\frac{\tilde{NI}}{\tilde{Y}}\right)_{-1} 0.11 + \left(\frac{\tilde{Y}_{nfc}}{\tilde{Y}}\right)_{-1} S + \left(\frac{\tilde{NI}}{\tilde{Y}}\right)_{-1} 0.18$$

11. Capacity

$$74. \Delta \tilde{GAP} = 3.50 - y$$

LIITE 2.

Todistetaan kaavan (120) perusajatus eli R-operaation esitys

$$(1) \quad R_{rs}^{(\varepsilon)} = \mathcal{D}_0^r \cdot V_{0r} T_{s0}^{(-\varepsilon)} K_{0r}^{(-1)},$$

kun operandina on apurivillä nro 0 laajennettu kaavio

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ C & \Pi & \hat{y} \end{bmatrix}.$$

Todistuksessa lähdetään identiteetistä

$$(2) \quad R_{rs}^{(-\varepsilon)} R_{rs}^{(\varepsilon)} = I$$

ja käytetään hyväksi relaatiota (113) eli

$$(3) \quad R_{rs}^{(-\varepsilon)} = V_{rr} T_{sr}^{(\varepsilon)} V_{rr}.$$

Väite (1) pitää paikkaansa, mikäli esitykset (1) ja (3) yhdistämällä saatava operaatiotulo

$$\begin{aligned} (4) \quad R_{rs}^{(-\varepsilon)} R_{rs}^{(\varepsilon)} &= V_{rr} T_{sr}^{(\varepsilon)} V_{rr} \mathcal{D}_0^r V_{0r} T_{s0}^{(-\varepsilon)} K_{0r}^{(-1)} \\ &= \mathcal{D}_0^r V_{rr} T_{sr}^{(\varepsilon)} V_{rr} V_{0r} T_{s0}^{(-\varepsilon)} K_{0r}^{(-1)} \end{aligned}$$

tuottaa tulokseksi identiteettioperaation.

Operaatiotulon (4) sieventämisessä tarvitaan kahta apulausetta:

$$\text{Apulause 1: } V_{rr} V_{0r} = V_{0r} P_{0r}^r = P_{0r}^r V_{rr}.$$

$$\text{Apulause 2: } V_h^T T_{rs} = T_{rs} V_h, \text{ kun } h \neq r, s.$$

Ensimmäinen apulause on todistettu kirjoituksessa Väliäho (1970).

Toinen apulause on helppo osoittaa todeksi käyttämällä samantyyppistä kaaviotarkastelua kuin kaavan (109) todistuksessa.

Operaatiotulo (4) voidaan nyt kirjoittaa

$$\begin{aligned} & D_0^r V_{rr} T_{sr}^{(\varepsilon)} V_{rr} V_{0r} T_{s0}^{(-\varepsilon)} K_{0r}^{(-1)} \\ &= D_0^r V_{rr} T_{sr}^{(\varepsilon)} P_{0r}^r V_{rr} T_{s0}^{(-\varepsilon)} K_{0r}^{(-1)} \\ &= D_0^r V_{rr} P_{0r}^r T_{s0}^{(\varepsilon)} V_{rr} T_{s0}^{(-\varepsilon)} K_{0r}^{(-1)} \\ &= D_0^r P_{0r}^r V_{0r} V_{rr} T_{s0}^{(\varepsilon)} T_{s0}^{(-\varepsilon)} K_{0r}^{(-1)} \\ &= D_0^r P_{0r}^r P_{0r}^r V_{0r} K_{0r}^{(-1)} \\ &= D_0^r V_{0r} K_{0r}^{(-1)} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ C & \Pi & \hat{y} \end{bmatrix} \\ &= I[C \ \Pi \ \hat{y}], \end{aligned}$$

koska yhdistelmä $V_{0r} K_{0r}^{(-1)}$ ei muuta operandina olevaa kaaviota

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ C & \Pi & \hat{y} \end{bmatrix} \text{ lainkaan.}$$



Todistetaan kaava (122) eli

$$R_{rs}^{(\epsilon)} = V_{sr} K_{sr}^{(\epsilon)} V_{sr}.$$

Todistusta varten esitetään kaksi apulausetta, joista ensimmäinen on kaavan (112) johdon yksi välivaihe:

Apulause 1:
$$R_{rs}^{(\epsilon)} = V_{rr} V_{ss} K_{rs}^{(\epsilon)} V_{ss} V_{rr}.$$

Toinen apulause on todistettu kirjoituksessa Väliaho (1970):

Apulause 2:
$$\begin{aligned} V_{rr} V_{ss} &= P_{rs}^r P_{rs}^s V_{rs} V_{sr} \\ &= V_{rs} V_{sr} P_{rs}^r P_{rs}^s. \end{aligned}$$

Permutointioperaatiot P_{rs}^r ja P_{rs}^s on esitelty pivotointioperaation yhteydessä, ks. s. 87.

Yhdistämällä apulauseet 1 ja 2 voidaan R-operaatio kirjoittaa seuraavasti:

$$R_{rs}^{(\epsilon)} = P_{rs}^r P_{rs}^s V_{rs} V_{sr} K_{rs}^{(\epsilon)} V_{sr} V_{rs} P_{rs}^s P_{rs}^r.$$

Aikaisemmin (kaava (109)) on todistettu, että

$$V_{hh} K_{rs}^{(\epsilon)} = K_{rs}^{(\epsilon)} V_{hh}, \text{ kun } h \neq r, s.$$

Vastaavanlaisella kaaviotarkastelulla voidaan osoittaa, että

$$V_{hk} K_{rs}^{(\epsilon)} = K_{rs}^{(\epsilon)} V_{hk}, \text{ kun } h \neq r \text{ ja } k \neq s.$$

Näin ollen voidaan kirjoittaa

$$R_{rs}^{(\epsilon)} = P_{rs}^r P_{rs}^s V_{rs} K_{rs}^{(\epsilon)} V_{sr} V_{sr} V_{rs} P_{rs}^r P_{rs}^s .$$

Koska V -operaatio on involutoorinen, saadaan edelleen

$$R_{rs}^{(\epsilon)} = P_{rs}^r P_{rs}^s V_{rs} K_{rs}^{(\epsilon)} V_{rs} P_{rs}^r P_{rs}^s .$$

Koska

$$V_{rs} P_{rs}^r P_{rs}^s = P_{rs}^r P_{rs}^s V_{sr} ,$$

ks. Väliäho (1970), saadaan R -operaatiolle edelleen lauseke

$$\begin{aligned} R_{rs}^{(\epsilon)} &= V_{sr} P_{rs}^r P_{rs}^s K_{rs}^{(\epsilon)} P_{rs}^r P_{rs}^s V_{sr} \\ &= V_{sr} P_{rs}^r P_{rs}^s P_{rs}^r P_{rs}^s K_{sr}^{(\epsilon)} V_{sr} \\ &= V_{sr} K_{sr}^{(\epsilon)} V_{sr} . \end{aligned}$$

