

Keskusteluaiheita

Discussion papers

Yrjö O. Vartia

VAKUUTUSSOPIMUSTEN ARVOSTAMINEN

VAKUUTUKSENOTTAJAN PÄÄTÖS-

ONGELMANA

No 79

4.3.1981

1. Johdanto	1
2. Päättämätieteen peruskäsitteistä	3
3. Vakuutus päätösten analysointi	14
4. Ordinaalisiin utiliteetteihin perustuva vakuutus sopimusten vertailu ...	29
5. Utiliteetin odotusarvoon perustuva vakuutus sopimusten vertailu	49
6. Yhteenveto	56
Liite: Teoreema stokastisten päätösvaihto- ehtojen arvostamisesta	61

This series consists of papers with limited circulation, intended to stimulate discussion. The papers must not be referred or quoted without the authors' permission.



Yrjö O. Vartia

VAKUUTUSSOPIMUSTEN ARVOSTAMINEN VAKUUTUKSENOTTAJAN PÄÄTÖS- ONGELMANA

1. JOHDANTO

Vakuutus päätöksen tekemisessä oleellisia tekijöitä ja näiden keskinäisiä riippuvuussuhteita vakuutuksenottajan näkökulmasta tarkasteltuna on varsin vaikeaa kuvata matemaattisesti täsmällisellä mutta kuitenkin käyttökelpoisella tavalla¹⁾. Tavanomaiset optimointi- ja utiliteettiteorian menettelytavat ja käsitevälineet näyttävät liiaksi yksinkertaistavan vakuutus päätöksen tekemisessä esiintyviä ongelmia. Toisaalta myöskään vakuutus käytäntöä lähempänä olevat teokset eivät näytä tarjoavan riittävän selväpiirteistä ja yleistä käsitteistöä päätöksenteon tueksi.

Tutkimuksessa pohditaan, kuinka Törnqvistin ja Nordbergin (1968) hahmottelemaa päätäntätieteen käsitteistöä voidaan soveltaa vakuutus päätöksiä analysoitaessa. Päätäntätieteen peruskäsitteiden merkitys ja operationalisointi eivät ole suinkaan itsestään selviä pyrittäessä kehittämään vakuutus sopimusten vertailuun ja arvostamiseen soveltavaa matemaattista analyysikehikkoa, siis yleistä vakuutus päätöksen matemaattista mallia.

Törnqvist ja Nordberg (jatkossa TN) toteavat teoksensa alkusanoissa: "Mielestämme on hyvin tärkeätä kehittää päätäntätiedettä nykyistä käyttökelpoisemmaksi. Tämä teos on lähinnä käsitettävä eräänlai-

1) Tutkimus sai virikkeen kirjoittajan ja VTM Jouko Kososen välisistä keskusteluista. Hyödyllisiä kommentteja olen saanut prof. Teivo Pentikäiseltä, FK Pertti Linkolalta, Dos. Pentti Vartialta ja valtiot. lis. Kari Alholta.

seksi yritykseksi luoda päätäntätieteelle systemaattinen perusta. Toivottavasti sen suppeus on omiaan ärsyttämään nuoria tutkijoita päätäntätieteen perusteelliseen tutkimiseen ja edelleen kehittämiseen." Tutkimuksen eräs tavoite onkin soveltaa päätäntätieteen käsitteistöä vakuutuksenottajan päätäntäongelman analysointiin. Tässä suhteessa tutkimus täydentää esim. Kososen (1977) kuvaamaa traditionaalista analyysivälineistöä.

Eräs tutkimuksessa käsiteltävä kysymys on, miksi vakuutus sopimuksia solmitaan vapaaehtoisesti vaikka odotettavien vakuutusmaksujen määrä yleensä ylittää vakuutuskorvauksien määrän eli vakuutusyhtiöiden kannattavuusvaatimuksen vuoksi ns. 'aktuaarisesti reiluja' vakuutuksia (joissa vakuutusmaksujen ja -korvausten odotettava määrä olisi yhtä suuri) ei ole eikä tarvitse olla tarjolla, vrt. Kosonen (1977, s. 38-51). Uhkapelien yhteydessä on pohdittu samantapaista pulmaa, miksi tietyt henkilöt osallistuvat uhkapeleihin (esim. arpajaisiin, lottoon, rulettiin), vaikka niissä odotettavan voiton on jätävä pelipankin kannattavuusvaatimuksen vuoksi keskimääräistä pelimaksua pienemmäksi. Kuitenkin selitykset sille, miksi vakuutus sopimuksen solmiminen kulloinkin koetaan kannattavaksi ja toisaalta, miksi uhkapelin pelaaminen on ymmärrettävää, palautuvat varsin erilaisiin päätöksentekijän motiiveihin. Nämä motiivit voivat hyvin realisoitua samassa henkilössä. Näin häviää mm. ongelma, miksi sama henkilö käyttäytyy joskus "riskinkarttajana" ja joskus "riskinottajana", mitä on ollut vaikea ymmärtää tiettyjen liiaksi yksinkertaistettujen päätösmallien puitteissa, ks. Kosonen (1977, s. 37). Tarpeellisten erojen huomioiminen toisaalta vakuutus sopimuksien ja toisaalta uhkapelien analysoinnissa on jäänyt puutteellisesti tiedostettua ilmeisestikin sen vuoksi, että molemmissa tapauksissa on yhteisenä

silmiinpistävänä piirteenä päätöksenteko epävarmuuden vallitessa, ts. molemmissa on huomioitava sattuman vaikutus korrektilla tavalla. Kuitenkin sattuman vaikutuksen korrekti huomioonottaminen on vakuutuspäätöksiä analysoitaessa oleellisesti mutkikkaampaa kuin uhkapelien tapauksessa. Tämä johtuu siitä, että uhkapelien tapauksessa satunnaismekanismin ja päätöksentekijän välillä ei ole mitään oleellista kytkentää, kun taas vakuutussojpmusten tapauksessa vakuutuskorvauksen maksuehdot määräytyvät vakuutuksenottajalle sattuvien tapahtumien (esim. onnettomuuksien) perusteella.

2. PÄÄTÄNTÄTIETEEN PERUSKÄSITTEISTÄ

TN:n (s. 9) mukaan "päättäntätieteen tärkeimpiä peruskäsitteitä ovat päätöstentekijä, päätöstilanne, päättämisprosessi, toteuttamisprosessi ja päättäntätoiminta". Päätöstentekijä b voi olla yksityinen henkilö tai useampien henkilöiden yhteenliittymä. Päätöstilanne ymmärretään erittäin laaja-alaiseksi käsitteeksi: "Päätöstentekijän b sosiaalinen kenttä sekä b :n käsitys maailman tapahtumista ajankohtaan t mennessä muodostavat hänen päätöstilanteensa¹⁾ $h^{(b)}(\rightarrow t)$ hetkellä t ." Näin luonnehdittuna b :n päätöstilanne sisältää ne oleelliset menneisyyttä koskevat tekijät, jotka voivat vaikuttaa b :n toimintaan päätöksentekohetkellä. Luonteenomaista b :n menneisyydestä muodostamalle kuvalle $h^{(b)}(\rightarrow t)$ on, että se syntyy pääasiassa b :n subjektiivisista käsityksistä, joten $h^{(b)}(\rightarrow t)$ voi olla ainoastaan b :n tiedossa.

1) Olen jättänyt TN:n käyttämästä symbolista $h_t^{(b)}(\rightarrow t)$ päätöksentekoaikajankohtaan liittyvän alaindeksin t pois, mikäli päätöksentekoaikajankohda ja symbolin $\rightarrow t$ ajankohta (menneisyyden kuvan päätepisteen aikakoordinaatti) ovat samat. Kuitenkin josain yhteyksissä merkintä $h_t^{(b)}(\rightarrow \bar{t})$, jossa $\bar{t} < t$, tulee kyllä kysymykseen.

Koska $h^{(b)}(\rightarrow t)$ on eräänlainen $b:n$ subjektiivinen "karrikatyryrikuva", voidaan luontevasti pohtia sen laatua (terävyyttä), joka "on pääasiallisesti riippuvainen $b:n$ käyttämien tietolähteiden luotettavuudesta".

Menneisyyden "muistikuvan" lisäksi $b:llä$ on tietyt odotukset tulevaisuuden suhteen. Nämä odotukset muodostavat päätösten tekijän tulevaisuudennäkymän $h^{(b)}(t \rightarrow)$ hetkellä t . TN siirtyy välittömästi tarkastelemaan mutkikkaita kysymyksiä tulevaisuuden kuvan jakamisesta piirteisiin $b(t \rightarrow)$, "joihin b pystyy suoraan vaikuttamaan ja piirteisiin $\beta(t \rightarrow)$, joiden tuleva kehitys on riippuvainen paitsi $b:n$ päätöksistä myös muista päätöstentekijöistä sekä luonnonilmiöistä". Nämä vaikutussuhteita koskevat ongelmat ovat tieteellisen tutkimuksen viisaisimpia.

Tässä vaiheessa on kuitenkin syytä tarkemmin pohtia "pääöstilanteen" ja "tulevaisuudennäkymän" välistä suhdetta. Kuten käytetty notaatio antaa ymmärtää, ei TN ilmeisesti halua lukea "tulevaisuudennäkymää" $h^{(b)}(t \rightarrow)$ erääksi "pääöstilanteen" $h^{(b)}(\rightarrow t)$ osaksi. Jatkossa TN tarkastelee näitä käsitteitä erikseen tosin korostaen, että tulevaisuudennäkymät voidaan luotettavasti muodostaa vain menneisyydestä saadun kokemuksen pohjalta (s. 14). TN:n käsitteistössä juuri tulevaisuudennäkymillä on erittäin oleellinen asema. Tätä korostaa esimerkiksi TN:n käyttämä notaatio, jolle on annettava suuri merkitys käsitteiden tulkintaa pohdittaessa. Tämä käsitykseni perustuu havaintoon, että Törnqvistillä on yleensä

pyrkimys sisällyttää merkintätapoihinsa käsitteiden luonnetta mahdollisimman paljon kuvastavia, usein operationaalisia piirteitä. Käsitteiden alkuperäiset luonnehdinnat voivat helposti painua unohduksiin, mutta merkintöjen erityispiirteet muistutavat oleellisista piirteistä, joihin uusilla tulkinnoilla ei saa puuttua.

Näyttääkin siltä, että "päätöstilanteen" $h^{(b)} (\rightarrow t)$ oleellinen sisältö liittyy merkintätapaan $(\rightarrow t)$, jolloin sitä voitaisiinkin luontevammin kutsua "tulevaisuudennäkymien" $h^{(b)} (t \rightarrow)$ kanssa symmetrisesti "menneisyydenkuvaksi". Tätä tulkintaa tukee esimerkiksi TN:n kappale I 2, jonka otsakkeeksi sopisi nähdäkseni pikemminkin "Menneisyydenkuvan tarkentaminen" kuin "Päätöstilanteen tutkiminen". Annamme myöhemmin "päätöstilanteelle" uuden, laajemman merkityksen, mutta ensin määritellään, mitä tarkoitetaan "päättämisprosessilla".

TN toteaa: "Päättämisprosessi on se toiminta, jonka avulla b pyrkii ratkaisemaan annetun päätösongelman. Yleensä päättämisprosessi johtaa päätökseen". Tietyn päätösongelman ratkaisuun pyrkivä päättämisprosessi alkaa, kun ongelmaa ryhdytään selvittämään ja se päättyy, kun päätös tehdään. Päätökseksi voidaan katsoa myös päättämistoiminnan lopettaminen ilman erityistä uutta päätöstä (päätetään noudattaa entistä menettelytapaa tai jäädä odottavalle kannalle, "wait and see"). Tällöin jokainen päättämisprosessi johtaa päätökseen.

On tarpeetonta yrittää tarkasti kuvata päättämisprosessin kulkua, joka voi yksinkertaisessa tapauksessa edetä suoraviivaisesti ongelman tarkentamisesta ja erittelystä päätöseen tai voi päätyä hankalassa tapauksessa monien yritysten ja erehdysten kautta umpikujaan ja toiminnan lopettamiseen hyödyttömänä. Tästä huolimatta on hyödyllistä luokitella päättämisprosessit aitoihin ja supistettuihin. Päättämisprosessi on aito, jos se sisältää seuraavat viisi vaihetta:

1. menneisyydenkuvan terävöittäminen ja sen sisältämän informaation ("sanoman") selventäminen.
2. eri päätösmahdollisuuksien selvittäminen.
3. eri päätösmahdollisuuksia vastaavien tulevaisuuden näkymien muodostaminen.
4. eri päätösmahdollisuuksia vastaavien tulevaisuuden näkymien arvostaminen ja vertailu.
5. päätöksen valinta eri päätösmahdollisuuksista.

Tehtyä päätöstä mahdollisesti seuraava toteuttamisprosessi jaetaan kahteen osaan:

6. päätöksen varsinainen toimeenpano.
7. tietojen kerääminen toimeenpannun päätöksen seurauksista.

Jos aidon päättämisprosessin viidestä vaiheesta jätetään pois yksi tai useampia on kysymys supistetusta päättämisprosessista. Näitä ovat mm. servomaattiset prosessit ja automaattiset valinnat (TN s. 16). Voitaneen todeta, että jokapäiväisissä päätöstilanteissa ihminen luonnostaan ja usein erittäin nopeasti käy lävitse vaiheet 2-5 ja valitsee sen päätösvaihtoehdon, johon liittyyvä tulevaisuudenkuva

häntä eniten miellyttää. Tämä nähdäkseni on ilmeistä jo käsitteiden merkitysten nojalla. Sen sijaan käsitteiden operationalisointi ja täsmentäminen on jo vaikeampi ongelma.

Pyrittäessä ratkaisemaan vaikeaa päätösongelmaa joudutaan ehkä ennen lopullisen päätöksen tekemistä prosessin kestäessä laajentamaan päätösmahdollisuuksien joukkoa, muodostamaan uusia päätösmahdollisuuksia vastaavat tulevaisuudennäkymät, muuttamaan aikaisempia tulevaisuudennäkymiä jne. Tämän päättämisprosessin iteratiivisen luonteen vuoksi on käytännössä mahdotonta antaa tarkkoja normeja sen läpiviemiseen.

Jos vaiheet 1-4 on jollakin tavalla läpikäyty voidaan siirtyä vaiheeseen 5, päätöksen valintaan. Voimme ajatella, että jokaisena ajankohtana päättämisprosessin edetessä päätöksentekijöillä on tietynlainen yleiskuva päätöksen tekemiseen vaikuttavista tekijöistä: eri päätösmahdollisuuksista, niihin liittyvistä tulevaisuudennäkymistä ja näiden keskinäisestä paremmuusjärjestyksestä. Päättämisprosessin edetessä tämä yleiskuva tavallisesti tarkentuu riittävästi, jolloin päätös tehdään. Tämä antaa meille aiheen määritellä TN:ää täydentäen päätöstilanteen seuraavasti.

Päätöstentekijän päätöstilanne $S^{(b)}(t)$ päätösprosessin tietynä ajankohtana muodostuu samaan ajankohtaan liittyvästä menneisyydenkuvasta $h^{(b)}(t)$, harkittavana olevasta päätösmahdollisuuksien joukosta $A'_{b,t}$, eri päätösmahdollisuuksia a vastaavista tulevaisuudennäkymistä $h^{(b)}(t \rightarrow |a)$ sekä näiden arvostamisperiaatteista. Tällöin päätöstilanne $S^{(b)}(t)$ jokaisena ajankohtana sisältää ne tekijät, joihin päätöstentekijä voisi perustaa senhetkisen päätöksensä.

Päätöstilanne $S^{(b)}(t)$ muuttuu koko ajan päättämiproessin siirtyessä iteratiivisesti vaiheista $\{1,2,3,4\}$ toiseen ja varsinaisen päätöksen viivästyessä. Vaikka yleensä eri päätösmahdollisuuksiin liittyvät tulevaisuudennäkymät tarkentuvatkin, voivat samanaikaisesti olosuhteet muuttua siten, että hyvän päätöksen tekemisen mahdollisuudet heikkenevät. Näin käy esimerkiksi silloin, kun liikkeellä olevaa ajoneuvoa ei riittävän nopeasti ohjata oikealle kulkureitille, tai suhdanteen heikentyessä toimenpiteitä lykätään tarkempia ennusteita odoteltaessa. Päätös tulisi tehdä silloin, kun päätöstilanteen tarkentamisesta saatava odotettava rajahyöty vielä ylittää päätöksen viivästymisestä aiheutuvan vastaavan menetyksen. Vain mikäli päätöksen lykkääminen ei sinänsä mitenkään heikennä päätöstilannetta, voidaan ajan kulumiseen suhtautua välinpitämättömästi (vrt. TN s. 49-53).

Törnqvistin ja Nordbergin hahmotteleman päätöksentekoteorian eräs ominaispiirre on sen pyrkimys konkreettisten päätösongelmien ratkaisemiseen. Siksi on oleellista kuvata todellinen päätöstilanne, eikä vain jotakin hypoteettista mahdollisuutta. Aloitetaan siis konkreettisella esimerkillä.

Esimerkki Tarjoan Pekka Ylä-Anttilalle 6.4.1977 Etlan kahvipöydässä mahdollisuutta osallistua 1 markan pelimaksulla peliin, jossa heitetään tavallista noppaa ja parillisella pisteluvulla Pekka saa 2 mk, parittomalla 0 mk. Tällöin hän häviää markan pelimaksunsa.

Pekka Ylä-Anttila on siis tarkasteltava päätöksentekijämme b. Kuinka voidaan luonnehtia kuvatussa päätöstilanteessa b:n men-

neisyydenkuvaa $h^{(b)} (\rightarrow t)$, päätösmahdollisuuksien joukkoa $A_{b,t}$, ehdollisia tulevaisuudennäkymiä $h^{(b)} (t \rightarrow |a)$ ja miten näitä voidaan arvostaa? Jo näin yksinkertaisessa tilanteessa syntyy syvällisiä, lähinnä filosofisia ongelmia. Erityisen kiinnostavaa on pohtia kuinka yksinkertaisiksi eo. käsitteet voidaan spesifioida silti säilyttäen päätösongelman kuvauksessa riittävä tarkkuus ja todenmukaisuus.

Päätösmahdollisuuksien joukoksi riittänee valita joukko $\{a_0, a_1\}$, jossa a_1 merkitsee peliin osallistumista ja a_0 osallistumattomuutta, siis kahvin juonnin tms. jatkamista. (Olen päättänyt, etten painosta Pekkaa osallistumaan peliin esim. virittämällä keskustelua Pekan mahdollisen kieltäytymisen motiiveista tms. Tällaisilla tempuilla voitaisiin a_1 :n valitseminen tehdä a_0 :aa miellyttävämmäksi vaihtoehdoksi, vaikkei Pekka yleensä haluaisikaan pelata tällaista peliä).

Pekan menneisyydenkuvasta $h^{(b)} (\rightarrow t)$ voitaisiin kirjoittaa romaani, mutta vain murto-osa siitä on tässä päätöstilanteessa relevanttia. Relevantteja tietoja ovat ehkä seuraavat

- pitääkö Pekka uhkapeleistä
- uskooko hän nopan tasapainoiseksi
- kuinka hän tuntee todennäköisyysslaskentaa
- kuinka hän suhtautuu markan suuruisiin tuloihin tai menoihin

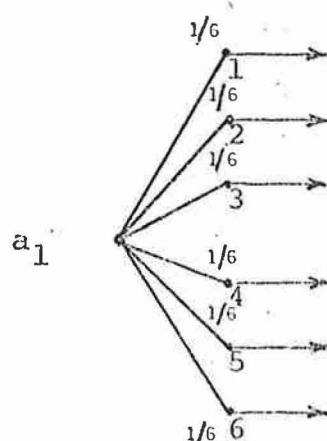
Tässä päätöstilanteessa menneisyydenkuvan merkitys on hyvin yleisluontoinen, koska tosiasiatietoja juuri kyseisestä nopasta ei ole olemassa.

Ehdolliset tulevaisuudennäkymät $h^{(b)}(t \rightarrow | a_0)$ ja $h^{(b)}(t \rightarrow | a_1)$ sensijaan ovat mielenkiintoisia. Nämä sisältävät Pekan yleiset tulevaisuuden odotukset, joista luonnollisesti voitaisiin kirjoittaa menneisyydenkuvan tapaan romaani. Lähes kaikki siinä olisi kuitenkin kyseisen päätöstilanteen kannalta yhdentekevää. Oleellista on vain kuinka vaihtoehtoihin a_0 ja a_1 liittyvät tulevaisuudennäkymät poikkeavat toisistaan, ts. kuinka peliin osallistuminen muuttaa Pekan yleistä tulevaisuudennäkymää $h^{(b)}(t \rightarrow | a_0)$. Jos Pekka päättää pelata, kuluu häneltä tähän vähän aikaa ja hän joko voittaa tai häviää markan. Näin pieni varallisuuden muutos tai pelin vaatima merkityksetön (?) aika ei voine oleellisesti vaikuttaa hänen tulevaisuudenkuvaansa. (Tilanne olisi toinen jos markan sijasta olisi kyseessä 1000 mk tai jos peli estäisi jonkin tärkeän toiminnon.) Peliin ryhtymisellä ei ole ilmeisesti Pekan tulevaisuuteen oleellisesti vaikutusta. Kuvatkoon H Pekan yleisiä tulevaisuuden odotuksia 6.4.1977. Voimme havainnollistaa tilannetta seuraavalla kaaviolla

Kaavio 1.

Päätösvaihtoehto

a_0 $\xrightarrow{1}$



Ehdolliset tulevaisuudenkuvat

0 mk ja H $h^{(b)}(t \rightarrow | a_0)$

-1 mk ja H $h^{(b)}(t \rightarrow | a_1, 1)$

+1 mk ja H $h^{(b)}(t \rightarrow | a_1, 2)$

-1 mk ja H $h^{(b)}(t \rightarrow | a_1, 3)$

+1 mk ja H $h^{(b)}(t \rightarrow | a_1, 4)$

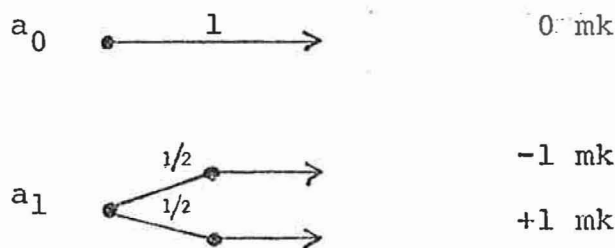
-1 mk ja H $h^{(b)}(t \rightarrow | a_1, 5)$

+1 mk ja H $h^{(b)}(t \rightarrow | a_1, 6)$

Vaihtoehdossa a_0 toteutuu todennäköisyydellä yksi H. Vaihtoehdossa a_1 saadaan todennäköisyydellä $1/6$ nopalla 1, jolloin Pekka häviää markan ja muuten toteutuu H. Vastaavasti todennäköisyydellä $1/6$ toteutuu pisteluku 2, +1 mk ja H, jne.

Koska nopan pisteluvuilla 1, 3 ja 5 sekä 2, 4 ja 6 ei ole mitään asiallista eroa tässä pelissä, voidaan kaaviota yksinkertaistaa seuraavasti:

Kaavio 2.



Sama kaavio kuvaa myös tilannetta, jossa nopan sijasta käytetään rahaa satunnaismekanismia. Yleensä ei vastaavia tilanteita analysoitaessa edes mainita yleisiä tulevaisuuden odotuksia H, vaan todetaan (tosin tehden tulevaisuuden kuvan käsitteelle hieman väkivaltaa) tulevaisuuden kuvien muodostuvan yksinomaan varallisuuden muutoksista. Muut asiat katsotaan tällöin asian kannalta epäoleellisiksi. Näin on palautettu tilanteen analyysi sellaiseksi, mihin talonpoikaisjärki sen lähes välttämättä johtaa. On syytä pysähtyä tässä pohtimaan, mitä yleisempiä johtopäätöksiä tai periaatteita esimerkki on havainnollistanut.

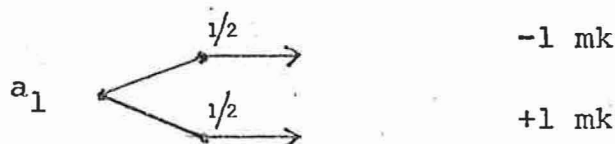
Ensinnäkin: Tavanomainen tapa ajatella päätöstilannetta saadaan yleisestä päätösmallista käsitteitä riittävästi yksinkertaistamalla, ts. jättämällä pois esim. tulevaisuuden kuvista epäoleelliset tekijät.

Toiseksi: Palaamalla takaisinpäin kaaviosta 2 kaavioon 1 voidaan nähdä, mitä tekijöitä arkiajatteluun tulee lisätä mutkikkaampaa pelitilannetta analysoitaessa.

Kolmanneksi: Päätöstilannetta analysoitaessa voidaan yhdistää sellaiset tulevaisuudenkuvat, joiden välillä ei b:n mielestä ole oleellista eroa.

Neljänneksi: Eri tulevaisuudenkuvien yhteisiä piirteitä ei tarvitse eksplisiittisesti mainita.

Todetaan lisäksi, että vaihtoehtoon a_1 liittyvää tulevaisuudennäkymää $h^{(b)}(t \rightarrow |a_1)$ kuvaa koko kaavio



Tämä tulevaisuudennäkymä jakautuu kahdeksi tulevaisuudenkuvaksi $h^{(b)}(t \rightarrow |a_1, \omega_1) = -1 \text{ mk}$ ja H sekä $h^{(b)}(t \rightarrow |a_1, \omega_2) = +1 \text{ mk}$ ja H , jotka toteutuvat kumpikin 50 %:n todennäköisyydellä.

Näiden tulevaisuudenkuvien symboleissa erottavina tekijöinä ('niminä') ovat symbolit ω_1 ja ω_2 , jotka esimerkissämme tarkoittavat paritonta ja parillista nopan pistelukua. Yleisesti tietyn päätösvaihtoehdon a tulevaisuudennäkymä $h^{(b)}(t \rightarrow |a)$ muodostuu (tai jakautuu) tulevaisuudenkuvista (ks. TN s. 22) $h^{(b)}(t \rightarrow |a, \omega_i)$, jotka b uskoo toteutuvan todennäköisyydellä p_i . Olkoon $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \dots\}$, $\mathcal{A} = \{A | A \subset \Omega\}$ ja $P(\{\omega_i\}) = p_i$ (vrt. Vasama ja

Vartia s. 143), jolloin $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ on todennäköisyyskenttä. Tällöin $h^{(b)}(t \rightarrow |a, \omega_i)$ on tn -kentän alkeistapaukseen $\omega_i \in \Omega$ liittyvä tulevaisuudenkuva. Yksinkertaisimmassa tapauksessa tämä on jonkin satunnaismuuttujan $\underline{x}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ arvo $\underline{x}(\omega_i)$, vähän yleisemmässä tapauksessa satunnaisvektorin $(\underline{x}_1, \dots, \underline{x}_n): \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ arvo $(\underline{x}_1(\omega_i), \dots, \underline{x}_n(\omega_i))$ pisteessä ω_i ja vieläkin yleisemmässä tapauksessa vektoriarvoisen stokastisen prosessin, ts. vektoriarvoisen satunnaisfunktion $(\underline{x}_1(h), \dots, \underline{x}_n(h))$, $h \geq t$, realisaatio $(\underline{x}_1(h, \omega_i), \dots, \underline{x}_n(h, \omega_i))$ pisteessä ω_i .

Edellä $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$, $\mathcal{A} = \{\emptyset, \Omega, \{\omega_1\}, \{\omega_2\}\}$ ja tn -mitan $P: \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$ määräävät alkeistodennäköisyydet $P(\{\omega_1\}) = P(\{\omega_2\}) = 0.5$. Tulevaisuudenkuvat muodostavat oleellisesti varallisuuden muutosta kuvaavan muuttujan $\underline{x}$ arvoista $\underline{x}(\omega_1) = -1$ mk ja $\underline{x}(\omega_2) = +1$ mk.

Siirrytään esimerkkinne tulevaisuudennäkymien vertailuun ja arvostamiseen. Jos esimerkkinne Pekan arvostaminen perustuu varallisuusmuutosten utiliteettifunktioon (vrt. TN s. 27-36) $u(x)$, hän laskisi yksinkertaisesti tämän odotusarvot $v(a_0) = u(0)$ ja $v(a_1) = \frac{1}{2}(u(-1) + u(1))$. Jos $u(x)$ on pienillä varallisuuden muutoksilla likimain lineaarinen funktio niin $u(0) \approx \frac{1}{2}(u(-1) + u(1))$. Tällöin Pekan mielestä on melkein yhdentekevää osallistuuko hän peliin vai ei. Näin asia varmaan onkin, eli Pekka ei näkisi oleellista arvostuseroa vaihtoehtoihin a_0 ja a_1 liittyvissä tulevaisuudennäkymissä. Tällöin hän ei pitäisi päätöstilannetta kovinkaan merkityksellisenä, vaan sitä voitaisiin verrata niihin jatkuvasti toistuviin 'pätöstilanteisiin', joihin ihminen

joutuu, esimerkiksi istuma-asennon valitsemiseen jne. Yleensä tämänkaltaisia valintoja ei edes kutsuta päätöksiksi. Tämä toteamus johtaa tärkeään viidenteen periaatteeseen päätösmallin yksinkertaistamiseksi: sellaiset erilaiset päätösvaihtoehdot, joihin liittyvät tulevaisuudenkuvat ovat b:n mielestä likimain indifferenttejä (siis joiden arvostustulokset ovat melkein samat) voidaan päätösmallissa alustavasti yhdistää. Lopullinen valinta tämän kaltaisten tosin fyysisesti toisistaan eroavien, mutta indifferenttien päätösvaihtoehtojen kesken voidaan huoletta suorittaa automaattisesti ilman erityistä pohdintaa, esimerkiksi arpomalla. Joissakin tapauksissa voivat kylläkin juuri indifferentit päätösvaihtoehdot muodostua pulmallisiksi, kuten tunnettu esimerkki aasista kahden heinäsuovan välissä osoittaa. Aasi ei pystynyt noudattamaan seuraavaa ohjetta: Jos ei ole mitään erityistä syytä tehdä niin tai näin, mutta jotenkin asia täytyy päättää, tehtäköön ratkaisu vaikkapa rahaa heittämällä.

3. VAKUUTUSPÄÄTÖKSEN ANALYSOINTI

Siirrymme tarkastelemaan kuinka vakuutus päätöksen tekemiseen voidaan soveltaa päätäntätieteen peruskäsitteitä. Vakuutus päätöksen tekee vakuutuksenottaja, joka on tässä tarkasteltava päätöstentekijä b. Päätösmahdollisuuksien joukko $A_{b,t}$ voidaan käsittää tietyssä vakuutusyhtiössä tarjolla oleviksi vakuutus sopimuksiksi; joukon $A_{b,t} = A$ voidaan päätösprosessin aikana olettaa säilyvän samana eli vakuutus sopimusten tarjonta ei muutu päätösprosessin kestäessä. Sensijaan b:llä ajan kohtana t harkittavana olevien päätösmahdollisuuksien (vakuutus-

sopimuksien) joukko $A'_{b,t} \subset A$ voi muuttua ajassa: esim.

b :lle voidaan esitellä uusia vakuutusmahdollisuuksia.

Yleensä vain jotkin tarjolla olevista vakuutus sopimuksista $a \in A$ ovat b :n kannalta harkinnan arvoisia, ja näistäkin vain eräät b todella sisällyttää joukkoon $A'_{b,t}$. Vaihtoehto a_0 ("wait and see") olla ottamatta mitään vakuutusta kuuluu luonnollisesti kumpaankin joukkoon A ja $A'_{b,t}$.

Olkoon t_0 ajanhetki, jolloin b ryhtyy pohtimaan vakuutuksen ottamista ja siis aloittaa ko. päätösprosessin. Symboli $t > t_0$ viittaa ajanhetkeen, jolloin päätösprosessi on vielä käynnissä. Menneisyydenkuvassa $h^{(b)}(\rightarrow t)$, jonka b muodostaa erityisesti tarkasteltavaa päätösongelmaa varten, b :n kokemukset ja käsitykset niistä satunnaisista riskitekijöistä, joita vastaan hän vakuutusta on hankkimassa, saavat luonnollisesti suuren merkityksen. Näiden käsitysten laatua on tarpeetonta kuvailla yksityiskohtaisesti. Voitaneen kuitenkin todeta, että b :n luonteenlaatu ja kokemusmaailmansa tulkin-
ta määräävät, kuinka hän suhtautuu esim. erilaisiin satunnaisluonteisiin tulonmuutoksiin. Nämä seikat määräävät mm. minkä asteinen riskinkarttaja tai riskinkantaja b on. Oletetaan, että b harkitsee tapaturma- tai sairausvakuutuksen ottamista. Tarjolla olevat vakuutukset takaavat b :lle tietyn kertaluonteisen tai vaihtoehtoisesti jatkuvan korvauksen erilaisista tulevaisuudessa mahdollisista tapaturmista tai sairastumisista. Vakuutus sopimuksessa määrätään ne yleiset ehdot, joilla korvauksiin ryhdytään sekä paljonko b joutuu maksamaan vakuutus sopimuksesta. On b :n tehtävä muodostaa jonkinlainen

ehdollinen subjektiivinen tulevaisuudennäkymä $h^{(b)}(t \rightarrow |a)$ jokaiselle harkittavana olevalle vakuutus sopimukselle $a \in A'_{b,t}$. Tulevaisuudennäkymän $h^{(b)}(t \rightarrow |a)$ pitäisi periaatteessa kertoa millaisena b näkee tulevaisuutensa, jos hän ottaa vakuutuksen a . Tulevaisuudennäkymät voivat olla äärimmäisen kompleksisia käsitteitä: jokaiseen päätösvaihtoehtoon $a \in A'_{b,t}$ sisältyy erilaisia vaihtoehtoisia tulevaisuudenkuvia $h^{(b)}(t \rightarrow |a, \omega) = h_t(\omega|a)$, jossa tulevaisuudenkuvan nimenä tai indeksinä on ω , joka kuuluu tarkoitusta varten konstruoituun perusjoukkoon $\Omega(a)$. Jokaista perusjoukon $\Omega(a)$ alkiota ω , $\omega \in \Omega(a)$, vastaa kääntäen eräs tulevaisuudenkuva $h_t(\omega|a) = h^{(b)}(t \rightarrow |a, \omega)$, vrt. TN s. 22. Mikäli vaihtoehtoisia tulevaisuudenkuvia $h_t(\omega|a)$, jossa a on valittu päätös, olisi vain äärellinen määrä, olisi $\Omega(a)$ äärellinen joukko, esimerkiksi jokin lukujen $\{0, 1, 2, \dots\}$ osajoukko. Tällöin voitaisiin määritellä todennäköisyyskenttä $(\Omega(a), \mathcal{A}(a), P^a)$, jossa $\mathcal{A}(a) = \{B | B \subset \Omega(a)\}$ on $\Omega(a)$:n kaikkien osajoukkojen muodostama äärellinen sigma-algebra ja todennäköisyysmitan $P^a: \mathcal{A}(a) \rightarrow [0, 1]$ määräisivät alkeistapausten $\omega \in \Omega(a)$ todennäköisyydet $P^a(\{\omega\}) = p^a(\omega)$. Todennäköisyys $p^a(\omega)$ kertoisi, mikä on päätösvaihtoehtoon a liittyvä tulevaisuudenkuvan $h_t(\omega|a)$ subjektiivinen esiintymistodennäköisyys, ts. kuinka todennäköisenä b pitää ko. kehittymismahdollisuutta valittuaan vakuutuksen $a \in A'_{b,t}$. Luonnollisesti $p^a(\omega) \geq 0$ ja $\sum p^a(\omega) = 1$, jossa summaus kohdistuu kaikkiin $\Omega(a)$:n elementteihin ω . Todennäköisyyksien $p^a(\omega)$ lisäksi ei tarvitakaan mitään muuta äärellisen todennäköisyyskentän $(\Omega(a), \mathcal{A}(a), P^a)$ täydelliseen määrittelyyn.

Tarkastellaan erilaisia mahdollisuuksia määritellä mieli-
valtaiseen vakuutusvaihtoehtoon a liittyviä tulevaisuudenkuvia.

Esimerkki 1. Tulevaisuudennäkymä $h^{(b)}(t \rightarrow |a)$ jaetaan kahteen
vaihtoehtoiseen tulevaisuudenkuvaan:

1. vakuutuksenottaja b loukkaantuu tai sairastuu vakavasti 5 vuoden sisällä. Nämä johtavat vakuutus-
sopimuksen a mukaisiin korvauksiin ja velvoitteisiin.
2. Muut mahdollisuudet, joista myös saadaan vakuutus-
sopimuksen a mukaiset korvaukset.

Tällöin voidaan valita $\Omega(a) = \{1, 2\}$ ja $b:n$ tehtävänä on arvioida millä todennäköisyydellä esim. tulevaisuudenkuva 1 toteutuu. Jos ko. todennäköisyys on $p^a(1)$ on arvioitu, niin täytyy asettaa $p^a(2) = 1 - p^a(1)$. Jos todennäköisyyden $p^a(1)$ arvio ei riipu valitusta vakuutuksesta, merkitsee tämä sitä, ettei b katso vakuutussopimuksen vaikuttavan hänen loukkaantumiseensa tai sairastumiseensa. Päinvastainenkaan tapaus ei ole mahdoton: b voi esim. tulla varomattomaksi otettuaan suuren tapaturmavakuutuksen. Voidaan myös ajatella $b:n$ epäilevän, ettei sattuma kiusallakaan aikaansaa mitään sellaista, jossa suuri vakuutuskorvaus tulisi kysymykseen.

Jos b osaa arvioida keskimääräisen korvauksen vaihtoehtois-
sa 1 ja 2 jokaiselle $a \in A_{b,t}$, voi hän vertailla näitä ja eri vakuutusmaksuja. Näiden vertailujen avulla hän voinee muodostaa karkean käsityksen eri tulevaisuudenkuvien $h^{(b)}(t \rightarrow |a)$ miellyttävyydestä ja sitä kautta arvioida myös varsinaisten

vakuutus sopimusten a sekä "wait and see"-päätöksen a_0 edullisuutta.

Esimerkki 2. b jakaa v. 1977 tulevaisuudennäkymänsä 10:een vaihtoehtoiseen mahdollisuuteen kiinnittäen huomiota ainoastaan mahdollisten tapaturmien ja sairastumisien vakavuuteen sellaisena kuin b sen itse kokee. Tulevaisuudennäkymät tulevat siis luokiteltua 10:een luokkaan $C_1, \dots, C_{10}$, joista C_1 sisältää vähiten vakaviin onnettomuuksiin liittyvät tulevaisuudennäkymät ja C_{10} eniten b:tä huolestuttavat mahdollisuudet. C_{10} voi sisältää mm. mahdollisuudet, että b menettää molemmat jalkansa ennen vuotta 1980 tai hänestä tulee täydellinen aivoinvalidi aikavälillä 1977-92, jotka b siis kokee erittäin vakavina onnettomuuksina. Sensijaan molempien jalkojen menettäminen aikavälillä v. 1980-92 sekä aivoinvaliditeetti v. 1992 jälkeen b katsoo kuuluvan vaihtoehtoon C_9 , jne. Oletetaan, ettei b usko vakuutus sopimusten vaikuttavan luokkien $C_1, \dots, C_{10}$ todennäköisyyksiin $p(C_1), \dots, p(C_{10})$, jotka hän arvioi esimerkiksi sairaus- ja tapaturmatilastojen avulla kuitenkin ottaen huomioon omaan elämäänsä liittyvät erityispiirteet. (Jos b matkustaa paljon autolla, aiheuttaa tämä tavallista enemmän onnettomuusriskiä, ryyppymiehenä voi b loukata itsensä tavallista useammin, jne.).

Jokaisen vakuutus sopimuksen a kohdalla b arvioi keskimääräisen korvauksen $R_i^a = R(C_i | a)$ sekä vakuutusmaksujen kokonaismäärät $L_i^a = L(C_i | a)$ onnettomuusluokittain. Jokaisesta vakuutus sopimuksesta b laatii seuraavanlaisen taulukon:

Kaavio 3: Tiettyyn vakuutus sopimukseen a liittyvien tulevaisuudenkuvien karkea kuvaus

Onnettomuusluokat				
	C_1	C_2	...	C_{10}
Todennäköisyydet	$p(C_1)$	$p(C_2)$		$p(C_{10})$
Korvaukset, mk	R_1^a	R_2^a		R_{10}^a
Vakuutusmaksut, mk	L_1^a	L_2^a		L_{10}^a

Näiden taulukoiden voidaan katsoa kuvaavan vakuutus sopimukseen $a \in A'_{b,t}$ liittyviä tulevaisuudennäkymiä $h^{(b)}(t \rightarrow |a)$. Jokainen tulevaisuudennäkö $h^{(b)}(t \rightarrow |a)$ jakautuu 10:een enemmän tai vähemmän miellyttävään tulevaisuudenkuvaan $h_t(C_1|a), \dots, h_t(C_{10}|a)$, jotka toteutuvat $b:n$ arvion mukaan todennäköisyyksillä $p(C_1), \dots, p(C_{10})$. Todennäköisyyskentissä $(\Omega(a), \mathcal{A}(a), P^a)$ on siis jokaisessa $\Omega(a) = \{C_1, \dots, C_{10}\}$ ja $P^a(\{C_i\}) = p(C_i)$ eli sama todennäköisyysmitta.

Eri päätösvaihtoehtoihin a liittyvien tulevaisuudennäkymien $h^{(b)}(t \rightarrow |a)$ arvostaminen on seuraava vaihe, johon $b:n$ on siirryttävä. Edellä hän on, tosin karkealla tavalla, käynyt läpi päätösprosessin aikaisemmat vaiheet 1-3: menneisyydenkuvan tarkentamisen (jota ei kylläkään ole eksplisiittisesti käsitelty), eri päätösmahdollisuuksien selvittämisen sekä näihin liittyvien tulevaisuudennäkymien muodostamisen. Tulevaisuudennäkymien arvostamisen ja vertailun voi b , mikäli hän rajoittuu yksinkertaiseen menettelytapaan, perustaa

vastaavien tulevaisuudenkuvien $h_t(C_1|a), \dots, h_t(C_{10}|a)$ miellyttävyyden erilliseen arvioimiseen. Vakuutusmaksujen kokonaismäärän L_i^a sallitaan vaihtelevan onnettomuusluokasta toiseen, jolla voidaan huomioida esim. vakuutusmaksujen maksuajan mahdollinen vaihtelu C_i -luokasta toiseen. Pääöstentekijämme voi konstruoida utiliteettifunktion $u(C_i|a)$, joka kertoo, missä määrin onnettomuusluokassa C_i a-vaihtoehtoon liittyvä vakuutuskorvaus R_i^a on pystynyt lieventämään b:lle sattunutta onnettomuutta ja paljonko vakuutusmaksu L_i^a on b:n hyvinvointia vähentänyt. Tehtävä on hyvin mutkikas ja yleisiä ohjeita eri vaihtoehtoihin a liittyvien utiliteettifunktioiden $u(C_i|a) = f(C_i, R_i^a, L_i^a|a)$ määrittämiseen on vaikea antaa. Eräät 'matemaattisesti elegantit' mutta huonot ratkaisut on kuitenkin syytä paljastaa. Jos esimerkiksi jokaisen vakuutussopimuksen a ja onnettomuusluokan C_i tapauksessa käytettäisiin samaa vain luvuista R_i^a, L_i^a riippuvaa funktiota (eli siis asetettaisiin $f(C_i, R_i^a, L_i^a|a) = g(R_i^a, L_i^a)$), kuviteltaisiin b:n utiliteettinmääräytyvän yksinkertaisella tavalla kuin vakuutuskorvauksista ja vakuutusmaksuista. Olisi usein vakava virhe jättää laskelmista pois onnettomuusluokan C_i olosuhteiden ja parin (R_i^a, L_i^a) yhteisvaikutus, josta b:n elämän laatu erityisesti vakavammissa onnettomuusluokissa riippuu. Tämänkaltaiset virheelliset formulaatiot jättävät huomiotta tapaturmavakuutuksen oleellisen piirteen, nimittäin sen, että vakuutuskorvauksen avulla elinolosuhteita parannetaan juuri silloin kun ne muuten muodostuisivat poikkeuksellisen huonoiksi. Jos onnettomuusluokassa C_i ja siihen liittyvän korvaus-maksu-parin (R_i^a, L_i^a) välinen interaktio jätetään mallittamatta, joudutaan helposti

analyysiin, jossa tapaturmavakuutuksen ottamisen ja uhkapeliin osallistumisen kesken ei kyetä tarkastelussa tekemään riittävää eroa. Asiaa on varsin vaikea lyhyesti selvittää, mutta jonkinlaisen käsityksen nyt puheenaolevista riippuvuussuhteista saa, kun pohdiskelee, mitä eroa $b:n$ kannalta on kahdessa seuraavassa "tapaturmavakuutuksessa".

Vakuutus sopimus a_1 (normaali itselle otettu tapaturmavakuutus):
 b ottaa itselleen tietynlaisen edellä kuvatun tapaturmavakuutuksen.

"Uhkapelivakuutus" $\tilde{a}_1$ (toiselle henkilölle ostettu merkillinen "tapaturmavakuutus", jonka edunsaaja ostaja on)
 b ostaa toiselle henkilölle d eo. kohdassa puheenaolevan tapaturmavakuutuksen ja sitoutuu vastaamaan kaikista siihen liittyvistä maksuista. Toisaalta d sitoutuu luovuttamaan $b:lle$ kaikki mahdollisesti saamansa vakuutuskorvaukset.

Vaikka "uhkapelivakuutus" $\tilde{a}_1$ on luonteeltaan moraaliton ja ehkä lainvastainenkin, on se kuvaus periaatteessa mahdollisesta uhkapeliin rinnastettavasta satunnaismekanismista, jossa b käyttää $d:lle$ sattuvia tapaturmia eräänlaisena rulettina. Sellainen tapaturmavakuutuksen matemaattinen formulointi, joka ei pysty tekemään oleellista eroa $a_1:n$ ja $\tilde{a}_1:n$ välillä (kun niitä tarkastellaan $b:n$ kannalta) jättää huomiotta (normaalin) tapaturmavakuutuksen oleelliset piirteet: $b:n$ kannalta $a_1:n$ tulee olla huomattavasti edullisempi kuin $\tilde{a}_1:n$. Jos b on riskinkarttaja täytyisi korrektin analyysin osoittaa $a_1:n$ olevan $b:n$ kannalta vakuutuseton vaihtoehto a_0 edullisemmän; lisäksi $a_0:n$ tulisi osoittautua tällöin edullisemmaksi

kuin "uhkapelivakuutuksen" $\tilde{a}_2$. Tavanomaista uhkapelien teoriaa ja siihen liittyviä käsitteitä sovellettaessa käy helposti niin, että a_1 ja $\tilde{a}_2$ näyttävät b:n kannalta yhtäpitäviltä vaihtoehdoilta. Tämä osoittaa, että uhkapelien teoria ei ole sellaisenaan sovelias vakuutus päätösten analysointiin. Vakuutus päätöksiä analysoitaessa on pystyttävä korrektisti mallittamaan jo uhkapeleihin sisältyvien satunnaisten tulojen ja menojen lisäksi se seikka, että tulot ja menot määräytyvät b:lle sattuvien tapaturmien perusteella, eivät b:n kannalta ulkokohtaisen ja sinänsä merkityksettömän satunnaismekanismin välityksellä.

Asetettaessa $f(C_i, R_i^a, L_i^a|a) = g(R_i^a, L_i^a)$ tapahtuu virhe siinä, että samaa täysin määrättyä (siis vapaita parametreja sisältämätöntä) $g(R, L)$ -funktioita sovelletaan jokaiseen onnettomuusluokkaan C_i . Jos asetetaan $f(C_i, R_i^a, L_i^a|a) = g_i(R_i^a, L_i^a)$ eli sallitaan mahdollisuus käyttää kussakin C_i -luokassa luokkakohdasta $g_i(R, L)$ -funktioita ei vastaavaa virhettä tapahdu.

Luvut $u(C_i|a) = f(C_i, R_i^a, L_i^a|a)$ voidaan ehkä normeerata välille $[0,1]$ käyttämällä TN:ssä s. 24 esiteltyä ns. todennäköisyysvaakaa. Tämä tarkoittaa seuraavaa menettelyä: b valitsee kaksi äärimmäistä tulevaisuudenkuvaa ("taivaan" ja "helvetin"), jotka edustavat parasta ja pahinta mahdollista ajateltavissa olevaa tulevaisuudenkuvaa ja yrittää arvioida, millainen arpajainen "taivaaseen pääsyn" ja "helvettiin joutumisen" kesken vastaisi miellyttävyydeltään kutakin tulevaisuudenkuvaa $h_t(C_i|a)$. Tulevaisuudenkuvan

utiliteetiksi $u(C_i|a)$ asetetaan tällöin ko. arpajaisesta saatu "taivaaseen pääsyn" todennäköisyys. Kuinka tahansa utiliteetit $u(C_i|a)$ on määrättykin, voidaan vaihtoehtoon a liittyvä hyvyysindikaattori laskea lineaarisena funktiona

$$(1) \quad g(a) = \sum_{i=1}^{10} p(C_i) u(C_i|a),$$

joka on siis utiliteettien odotusarvo vaihtoehtoon a tapauksessa (vrt. TN s. 23). Jos b katsoo päätöksen tekemisen olevan tässä vaiheessa ajankohtaista, eikä siis halua enää jatkaa päätösprosessia, voi b yksinkertaisesti pitää edullisimpana sitä vakuutus sopimusta $\hat{a} \in A'_{b,t}$, jolle (1) antaa suurimman arvon. Tämä vakuutus sopimus olisi b :n senhetkisessä päätöstilanteessa $S^{(b)}(t)$ luontevin valinta.

Tutkitaan vielä kuinka eräillä 'matemaattisesti elegantilla' yksinkertaistuksilla saadaan esiin alan kirjallisuudessa aiemmin tarkasteltuja tapauksia. Oletetaan suoraviivaisesti, että b :n tulevaisuudenkuvien arvostaminen voidaan jakaa kahteen riippumattomaan ja additiiviseen tekijään, joista ensimmäinen kertoo, kuinka epämiellyttäväksi b kokee yleensä onnettomuusluokkaan C_i joutumisen ja toinen tekijä kertoo, kuinka paljon vakuutus sopimuksen mukaiset ehdot muuttavat hänen elämänsä laatua ko. onnettomuusluokassa. Tällöin $u(C_i|a)$ voidaan esittää muodossa

$$(2) \quad u(C_i|a) = u_1(C_i) + u_2(R_i^a, L_i^a),$$

jossa $u_1(C_i)$ on onnettomuusluokan C_i liittyvä yleisutiliteetti, joka ei riipu b :n päätösvaihtoehdosta a ja $u_2(R_i^a, L_i^a)$ on vain luvuista R_i^a, L_i^a riippuva korjaustekijä, joka vaihtoehdolle a_0 asetetaan nollaksi. Tällöin (1) yksinkertaistuu muotoon

$$(3) \quad g(a) = \sum p(C_i) u_1(C_i) + \sum p(C_i) u_2(R_i^a, L_i^a),$$

Ensimmäinen tekijä on kaikille päätösvaihtoehdoille a yhteinen 'yleisutiliteetti', joka mittaa "wait and see"-vaihtoehdon a_0 tulevaisuudenkuvan miellyttävyyttä. Tämä tekijä $g(a_0) = \sum p(C_i) u_1(C_i)$ riippuu b :n mielenlaadun pessimistisyydestä tai optimistisuudesta, ts. kuinka vakavina hän kokee eri C_i -luokkien onnettomuudet ja millä todennäköisyyksillä hän katsoo joutuvansa ko. tilanteisiin. Yhtälö (3) voidaanakin esittää muodossa

$$(4) \quad g(a) - g(a_0) = \sum p(C_i) u_2(R_i^a, L_i^a),$$

josta havaitsee b :n vertailevan eri vaihtoehtojen a edullisuutta suoraan a_0 -vaihtoehdon edullisuuteen. Tekijää $g(a_0)$ ei tässä lähestymistavassa tarvitse ollenkaan määrätä, sillä riittää kertoa, paljonko varsinaiset vakuutus sopimukset muuttavat a_0 -vaihtoehtoon liittyvän tulevaisuudennäkymän miellyttävyyttä.

Tämän analysointiyrityksen rajoittuneisuus tai itse asiassa sen kykenemättömyys kuvata vakuutuksenottajan todellista käyttäytymistä havaitaan, kun vertaillaan kaavan (4) avulla edellä kuvattua todellista tapaturmavakuutusta a_1 "uhkapelivakuutukseen" $\tilde{a}_1$. Koska nämä ovat vakuutusehtojen osalta identtisiä on niissä täsmälleen samat lukuarvot (C_i, R_i^a, L_i^a) -suureilla. Edellä oletettiin, että funktio $u_2(R_i^a, L_i^a)$ riippui ainoastaan merkityistä tekijöistä ja samaa (täysin määrättyä) $u_2(R, L)$ -funktioita käytettiin jokaisessa C_i -luokassa. Tällöin lauseke $\sum p(C_i)u_2(R_i^a, L_i^a)$ saa saman arvon sekä a_1 :n että "uhkapelivakuutuksen" $\tilde{a}_1$ tapauksessa, kun se lasketaan mekaanisesti näitä kuvaavista kaavioista 3. Näin ollen $g(a_1) - g(a_0) = g(\tilde{a}_1) - g(a_0)$ eli yhtälöiden (2)-(4) kuvaamaa arvostustapaa käytettäessä ei pystytä erottamaan toisistaan a_1 - ja $\tilde{a}_1$ -sopimuksia. Tämä osoittaa, että oletus (2) ja siitä seuraavat yhtälöt (3)-(4) eivät ole realistisia, vaan jättävät huomiotta tapaturmien sattumista johtuvien elinolosuhteiden muutoksen ja korvaus-maksu-parin keskinäisen riippuvuuden. Arvostustapaa (4) sovellettaessa tapaturmavakuutuksiin suhtaudutaan uhkapelin tapaan, ikäänkuin kysymyksessä olisivat vain rahalliset arvot.

Tämän näkee yksinkertaisimmin kirjoittamalla (4):n täydellisemmin muodossa $g(a) - g(a_0) = g(a, R^a, L^a) - g(a, \vec{0}, \vec{0})$, jossa $R^a = (R_1^a, \dots, R_{10}^a)$ ja $L^a = (L_1^a, \dots, L_{10}^a)$. Oletetaan lisäksi, että onnettomuusluokat C_i on määritelty siten, että niiden todennäköisyydet ovat yhtä suuret eli tässä $p(C_i) = 1/10$. Kahdessa vakuutus-sopimuksessa, joissa esiintyvät samat (R_i, L_i) -parit mutta eri järjestyksessä saavuttaa $g(a, R^a, L^a)$ -funktio tällöin saman arvon. Täsmällisemmin: Permutoidaan molemmat vektorit R^a ja L^a uuteen järjestykseen kertomalla permutaatiomatriisilla ψ , jolloin

uudet permutoidut vektorit ovat ψR^a ja ψL^a ja tarkastellaan vakuutusta $\bar{a}$, jossa ψR^a ja ψL^a ovat (R, L) -parina. Tällöin arvostusfunktion (4) tapauksessa a ja $\bar{a}$ ovat yhtäpitävät eli $g(a, R^a, L^a) = g(\bar{a}, \psi R^a, \psi L^a)$.

Toinen tapa nähdä (4):n virheellisyys on laskea tietyn C_i -luokan korvauksen R_i^a rajahyöty $\partial u(C_i | a) / \partial R_i^a = \partial u_2(R_i^a, L_i^a) / \partial R_i^a = f(R_i^a, L_i^a)$, joka riippuu ainoastaan C_i -luokan (R, L) -lukujen suuruudesta ja on siis sama parin (R, L) funktio C_i -luokasta toiseen. Jos esim. C_1 - ja C_{10} luokissa (R, L) -parit olisivat yhtä suuret, $(R_1^a, L_1^a) = (R_{10}^a, L_{10}^a)$, aiheuttaisi korvausten markan lisäys molemmissa luokissa saman hyvinvoinnin lisäyksen. Realistisemmassa analyysissä on korvausten rajahyöty oletettava pahemmissa onnettomuusluokissa suuremmaksi kuin lievenmissä onnettomuusluokissa, sillä pahan onnettomuuden sattuesssa korvauksia juuri kipeästi tarvitaan.

Tätäkin rajoittuneempi ja epärealistisempi arvostustapa saadaan olettamalla, että utiliteettifunktiossa $u_2(R_i^a, L_i^a)$ molemmilla tekijöillä on itsenäinen additiivinen vaikutus, ts.

$$(5) \quad u_2(R_i^a, L_i^a) = \bar{u}_2(R_i^a) - \bar{u}_3(L_i^a) .$$

Tällöin (4) erikoistuu muotoon

$$(6) \quad g(a) - g(a_0) = \sum p(C_i) \bar{u}_2(R_i^a) - \sum p(C_i) \bar{u}_3(L_i^a) .$$

Yhtälön oikean puolen ensimmäinen tekijä on vakuutuskorvausten aikaansaaminen utiliteettien odotusarvo ja jälkimmäinen vakuutusmaksuista johtuva utiliteetin keskimääräinen menetys.

Arvostustapaa (6) käytettäessä parhaana pidettäisiin vakuutus-sopimusta, jonka korvausten R_i^a keskiutiliteetti $\bar{u}_2$ -asteikolla eniten ylittää $\bar{u}_3$ -asteikolla lasketun vakuutusmaksujen 'keski-haitan'.

Toinen mahdollisuus spesifioida (4) vielä lähemmäs uhkapelien analysoinnissa käytettyjä utiliteettifunktioita on olettaa, että $u_2(R_i^a, L_i^a)$ riippuu vain nettomääräisistä korvauksista $R_i^a - L_i^a$, ts.

$$(7) \quad u_2(R_i^a, L_i^a) = u_4(R_i^a - L_i^a).$$

Tällöin (4) erikoistuu muotoon

$$(8) \quad g(a) - g(a_0) = \sum p(C_i) u_4(R_i^a - L_i^a).$$

Vakuutus-sopimuksien edullisuusvertailu perustuu (8):ssa netto-määräisten korvausten utiliteettien keskiarvoon, vrt. esim. TN s. 33. Arvostustapoja (6) ja (8) käytettäessä vakuutuksiin suhtaudutaan ikäänkuin ne olisivat vain satunnaisia rahatuloja ja menoja tuottavia pelejä. Tämä lähestymistapa ei riitä kuvaamaan vakuutuksen ottamispäätösten erityispiirteitä. Oleellisesti esimerkiksi (8):aa realistisempi vakuutus-päätösten arvostustapa saadaan, jos kaikille C_i -luokille yhteisen $u_4(R - L)$ -funktion sijaan käytetään kussakin C_i -luokassa omaa erityistä $u_{4i}(R - L)$ -funktioita. Tällöin voidaan huomioda se, vastaako esim. tietyssä C_i -luokassa saatu korvaus R_i^a todellista tarvetta vai ei. Luokkaspesifien $u_{4i}(R - L)$ -funktioiden tapauksessa (8) yleistyy siis huomattavasti käyttökelpoisempaan muotoon

$$(9) \quad g(a) - g(a_0) = \sum p(C_i) u_{4i}(R_i^a - L_i^a).$$

Funktiot $u_{4i}(R_i^a - L_i^a)$ kertovat, missä määrin nettomääräiset vakuutuskorvaukset muuttavat elinolosuhteita kunkin onnettomuusluokan tapauksessa, jolloin tietynsuuruisen nettokorvauksen tuottama hyvinvointivaikutus luonnollisestikin vaihtelee onnettomuusluokasta toiseen.

Todella naivi vakuutusten arvostusmalli saadaan (6):sta olettamalla $\bar{u}_2(x) = \bar{u}_3(x) = x$, jolloin b:n päätös perustuisi odotamiensa rahatulojen ja rahamenojen vertailuun

$$(10) \quad g(a) - g(a_0) = \sum p(C_i) R_i^a - \sum p(C_i) L_i^a = \sum p(C_i) (R_i^a - L_i^a).$$

Tähän samaan yhtälöön päädytään (8):sta jos $u_4(x) = x$.

Jos b on arvioinut onnettomuusluokkien todennäköisyydet $p(C_i)$ suurin piirtein oikein, jää (10) negatiiviseksi kaikille tarjolla oleville vakuutus sopimuksille. Tässä ei ole mitään merkittävää: on vain osoitettu, että vakuutus sopimuksen tekeminen ei b:n näkökulmasta katsoen normaalisti perustu odotettavaan taloudelliseen hyötyyn. Suure (10) voi olla positiivinen vain jos b:n arvioimat todennäköisyydet $p(C_i)$ oleellisesti poikkeavat vastaavista vakuutusyhtiöiden 'objektiivisesti' arvioimista todennäköisyyksistä. Vakuutusyhtiöiden taloudellisen kannattavuuden vuoksi tällaisia 'aktuaarisesti reiluja' vakuutuksia ei voida tarjota. Koska kuitenkin vakuutusyhtiöiden tarjoamat 'aktuaarisesti epäreilut' vakuutukset käyvät kaupaksi, seuraa tästä että joko vakuutuksenottajan hyvyysindikaattori ei ole muotoa (10) tai vakuutuksenottajan arvioimat toden-

näköisyydet $p(C_i)$ poikkeavat oleellisesti vastaavista 'objektiivisista' todennäköisyyksistä. Mitään merkillistä ei pitäisi olla siinä, että sekä vakuutuksenottaja että vakuutusyhtiö odottavat hyötyvänsä vakuutus sopimuksen solmimisesta. Vakuutusyhtiö tietää saavansa vakuutus sopimuksista yleensä ja keskimäärin taloudellista hyötyä (eli sille $g(a) > g(a_0)$), kun taas vakuutuksenottajalle vakuutusvaihtoehtoon liittyvä tulevaisuudennäkymä on a_0 -vaihtoehtoa miellyttävämpi huolimatta odotettavasta taloudellisesta tappiosta.

4. ORDINAALISIIN UTILITEETTEIHIN PERUSTUVA VAKUTUUS-SOPIMUSTEN VERTAILU

Seuraavassa esimerkissä hahmotellaan aiempaa yksityiskohtaisemmin ja toivoaksemme myös konkreettisemmin, kuinka eri vakuutus päätöksiä vastaavia tulevaisuudennäkymiä voidaan vertailla ja arvostaa. Tarkastelua ei perusteta suoraan edellä esitelyihin hyvyysindikaattoreihin vaan vielä konkreettisempiin vertailuperiaatteisiin.

Esimerkki 3. Oletetaan, että b jakaa tulevaisuudennäkymänsä mielivaltaisiin, mutta toisensa poissulkeviin osajoukkoihin (tapahtumiin) $C_1, \dots, C_I$. Nämä on määriteltävä ensisijaisesti vakuutus sopimukseen sisältyvien ja korvauksiin johtavien tapahtumien perusteella¹⁾. Lisäksi voidaan luokittelussa huomioi-

1) Kuitenkaan luokitteluun ei saa sisällyttää vakuutus korvauksien suuruutta tai vastaavia myöhemmin huomioitavia tekijöitä, sillä C_i :n ehdollisten esiintymistodennäköisyyksien (kun tietty vakuutus a on otettu) tulisi pysyä a :sta mahdollisimman riippumattomina. Esim. erilaisia tapaturmavakuutuksia harkittaessa luokittelutekijöinä olisi käytettävä ainakin eriasteisiin invaliditeetteihin johtavia tapaturmia. Lisäksi luokittelun olisi oltava jokaisen harkittavana olevan vakuutuksen kannalta käyttökelpoinen, siis riittävän yksityiskohtainen.

da muita $b:n$ tärkeänä pitämiä tekijöitä, jotka helpottavat vakuutuksien edullisuuden arviointia, esim. perhesuhteiden muutoksia. Oletetaan, että $b:n$ subjektiivinen todennäköisyys $p^a(C_i)$ sille, että ehdollisessa tulevaisuudennäkymässä $h^{(b)}(t \rightarrow |a)$ toteutuvat $C_i:n$ määrittävät ehdot (ts. että C_i 'toteutuu', kun on otettu vakuutus a), voidaan asettaa a :sta riippumattomaksi, $p^a(C_i) = p(C_i)$. Edelleen oletetaan, että b pystyy järjestämään ehtojen C_i ja vakuutus päätösten $a_k \in A'_{b,t}$ määrittelemät tulevaisuudenkuvat $h_t(C_i|a) = h^{(b)}(t \rightarrow |a, C_i)$ miellyttävyyssjärjestykseen. Tämä tarkoittaa sitä, että parien (C_i, a_k) kesken tulee konstruoida täydellinen transitiivinen järjestys $\sim$. Tulevaisuudenkuvia vertailtaessa kiinnitetään luonnollisesti erityisesti huomiota siihen, miten vakuutusehtojen mukaiset korvaukset ja maksut lisäävät tai vähentävät kuhunkin C_i -luokkaan liittyvän peruskuvan $h^{(b)}(t \rightarrow |a_0, C_i)$ subjektiivista miellyttävyyssarvoa. Olkoon $u^b(C_i|a_k)$ edelleen $b:n$ pariin (C_i, a_k) liittävä utiliteetti, joka toteuttaa ehdon

$$(11) \quad (C_i, a_k) \succsim (C_j, a_l) \iff u^b(C_i|a_k) \geq u^b(C_j|a_l).$$

kaikille luvuille i, k, j ja l .

Tämä merkitsee sitä, että utiliteettien $u^b(C_i|a_k)$ järjestys vastaa tulevaisuudenkuvien (C_i, a_k) miellyttävyyssjärjestystä. Tulevaisuudenkuvien miellyttävyyttä mitataan siis järjestysasteikolla, ks. Vasama ja Vartia (1972, s. 43-46). Jos $u^b(C_i|a_k)$ on jokin (8):n toteuttava utiliteettifunktio ja $h(x)$ on mielivaltainen kasvava funktio, niin $\bar{u}^b(C_i|a_k) = h(u^b(C_i|a_k))$ on myös ehdon (8) toteuttava utiliteettifunktio.

Varsinainen ongelma on tilanteiden (C_i, a_k) keskinäinen vertailu ja järjestäminen miellyttävyyss-epämiellyttävyyssasteikolle. Kun tämä on tehty, esitetään saatu järjestys vain utiliteettien avulla, jonka jälkeen ongelman tarkastelu voi jatkua numeerisia utiliteettiarvoja käyttäen.

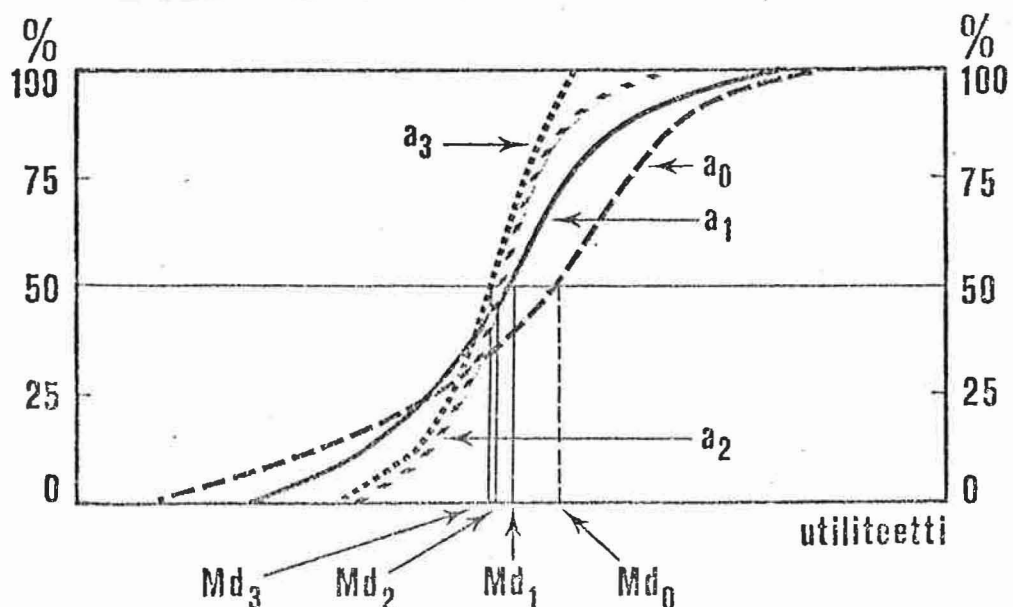
Jokaiselle vakuutus sopimukselle a_k voidaan utiliteettien jakaumaa $\{u^b(C_i|a_k), p(C_i), i=1, \dots, I\}$ käyttäen suoraan laskea ko. ehdolliseen tulevaisuudennäkymään liittyvien utiliteettien kertymäfunktio

$$(12) \quad F(u|a_k) = P(u^b \leq u|a_k) = \sum_{i=1}^I p(C_i) T(u^b(C_i|a_k) \leq u),$$

jossa $T(p)$ on väitteen p totuusfunktio eli $T(p) = 1$, jos p on tosi ja $T(p) = 0$ muulloin.

Nämä kertymäfunktio kertovat havainnollisessa muodossa, millainen hyvinvoinnin odotettava jakauma liittyy eri vakuutus sopimukseen. Kukin kertymäfunktio $F(u|a_k)$ kertoo, millä todennäköisyydellä b uskoo tulevaisuuden hyvinvointinsa (utiliteettinsa) jäävän utiliteettiarvon u alapuolelle vakuutus sopimuksen a_k tapauksessa.

Kuvio 1. Vakuutuksenottajan hyvinvoinnin jakaumaa kuvaavat utiliteettien kertymäfunktio neljän kuvitellun vakuutus sopimuksen tapauksessa



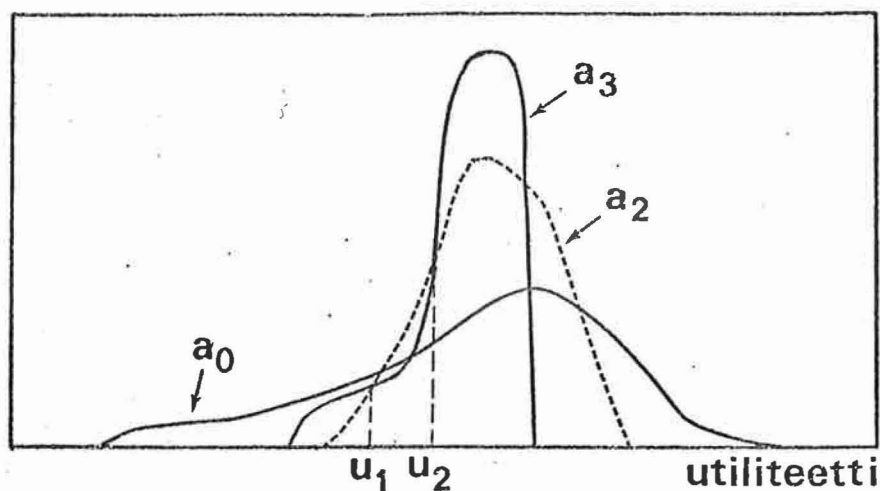
Kuviossa utiliteettien kertymäfunktio on esitetty jatkuvina (siis epäjatkuvat porraskäyrät on pyöristetty).

Ilman vakuutusta (a_0 -tapauksessa) utiliteetti vaihtelee eniten ja a_3 -tapauksessa vähiten, mutta samalla mediaanin avulla mitattu "keskiutiliteetti" on a_0 -tapauksessa suurin ja a_3 -tapauksessa pienin, $Md_0 > Md_1 > Md_2 > Md_3$. Kaikki muut paitsi a_2 :een ja a_3 :een liittyvät kertymäfunktio leikkaavat toisensa; a_2 :een liittyvä kertymäfunktio on a_3 :een liittyvän kertymäfunktion oikealla puolella.

Voimmekin päätellä, että jokainen rationaalisesti arvostava vakuutuksenottaja pitää a_2 -vakuutus sopimusta a_3 :a parempana, $a_2 \succ a_3$. Tämä tulos ei ole suinkaan triviaali, kuten ensin voisi ajatella, vaan on varsin syvällinen ordinaalisen utiliteettiteorian teoreema, ks. liite. Tulos ei liene yleisesti tunnettu, koska usein sen avulla saatavat johtopäätökset on jätetty tekemättä tai jopa väitetään jotain tuloksen kanssa ristiriitaista (esimerkiksi 'mean-variance'-analyysin sovellutuksista tällaisia tapauksia voidaan löytää).

Vaikka vaihtoehtojen a_2 ja a_3 kertymäfunktio eivät leikkaa, mikä on riittävä ehto niiden välisen järjestyksen yksikäsitteiselle määrittämiselle, niin niiden tiheysfunktio yleensä ovat suurelta osalta "päällekkäisiä" ja siten leikkaavat toisensa, vrt. Kosonen (1977, s. 38). Edellä tarkastellussa tapauksessa tiheysfunktio ovat seuraavan kuvion mukaiset:

Kuvio 2: Vakuutuksenottajan hyvinvoinnin jakaumaa kuvaavat utiliteettien tiheysfunktiot vakuutus sopimuksien a_0 , a_2 ja a_3 tapauksessa

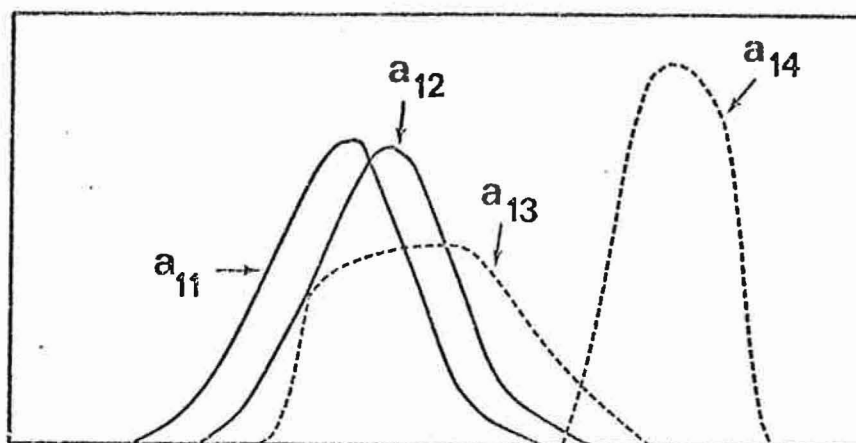


Esimerkiksi se tosiseikka, että a_2 -vaihtoehdossa melko pieniä utiliteettiarvoja $u_1 < u < u_2$ vastaavia "ikävyöksiä" esiintyy useammin kuin a_3 -vaihtoehdossa (tällä alueella a_2 :n tiheysfunktio on suurempi kuin a_3 :n tiheysfunktio), ei voi muuttaa vaihtoehtoa a_3 a_2 :ta paremmaksi. Niiden kertymäfunktioiden leikkaamattomuus painaa arvostusvää'assa paljon enemmän. Monet ovat ilmeisesti tottuneet tarkastelemaan satunnaisesti määräytyvien etujen tai haittojen arvostamista kuvion 2 tapaan tiheysfunktiota (tai epäjatkevassa tapauksessa frekvenssi-funktioita) käyttämällä. Tämä on esim. ns. keskiarvo-varianssi-tarkastelussa (mean-variance-analysis) sovellettu tapa. Tällöin jää helposti oleellisia tosiasioita havaitsematta.

Kertymäfunktioiden leikkaamattomuus ei siis suinkaan edellytä, että tiheysfunktiot eivät leikkaisi tai että ne saataisiin toisistaan vain siirtämällä utiliteettiasteikolla.

Seuraavassa kuviossa on esitetty neljää uutta vaihtoehtoa a_{11} , a_{12} , a_{13} ja a_{14} vastaavat tiheysfunktiot. Näiden vaihtoehtojen keskinäisen järjestyksen määrittäminen on todella triviaali tehtävä verrattuna kuvion 2 vaihtoehtojen a_2 ja a_3 vastaavaan tehtävään, joka sekin ratkesi varsin yksinkertaisesti kertymäfunktioita vertailemalla.

Kuvio 3: Vakuutuksenottajan hyvinvoinnin jakaumaa kuvaavat utiliteettien tiheysfunktiot neljän kuvitellun vaihtoehdon tapauksessa



Asiaa tarkemmin ajattelematta saattaa erehtyä uskomaan, että ainoastaan vaihtoehtojen a_{11} ja a_{14} kaltaisissa tapauksissa paremmuusjärjestys olisi kiistattomasti määrättävissä. Tilastotieteeseen perehtyneet ovat erityisen tottuneita havainnollistamaan asiaa vaihtoehtojen a_{11} ja a_{12} kaltaisilla erityistapauksilla, jossa jakautumaa vain siirretään utiliteettiasteikolla.

Seuraavaksi tarkastellaan kahteen eri vaihtoehtoon liittyvän utiliteetin arvostamisen ns. majorointiperiaatetta¹⁾. Todettakoon vielä, että em. kertymäfunktioiden leikkaamattomuuteen perustuva vaihtoehtojen järjestyksen yksikäsitteinen määräytyminen on toinen ja oleellisesti syvällisempi tulos (ks. liite) kuin seuraavaksi tarkasteltava majorointiperiaate.

Majorointiperiaate: Olkoon $F(x)$ reaalisen satunnaismuuttujan $\underline{x}$ kertymäfunktio sekä $u_1(x)$ ja $u_2(x)$ kaksi $F(x)$:n suhteen Stieltjes-integroituva funktiota. Jos mielivaltaista x :ää vastaava $u_1(x)$ on aina korkeintaan $u_2(x)$:n suuruinen,

$$(9) \quad u_1(x) \leq u_2(x) ,$$

niin myös u_1 :n odotusarvo on korkeintaan u_2 :n odotusarvon suuruinen:

$$(10) \quad \int_{-\infty}^{\infty} u_1(x) dF(x) \leq \int_{-\infty}^{\infty} u_2(x) dF(x) .$$

Sama tulos voidaan kirjoittaa myös todennäköisyyskentän $(\Omega, \mathcal{A}; P)$ P -mitallisille satunnaismuuttujille $\underline{u}_1 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ja $\underline{u}_2 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ seuraavasti:

$$\text{Jos} \quad \forall \omega \in \Omega : \underline{u}_1(\omega) \leq \underline{u}_2(\omega)$$

$$\text{niin} \quad E\underline{u}_1 \leq E\underline{u}_2, \text{ jossa } E\underline{u}_i = \int \underline{u}_i(\omega) dP.$$

1) Tämä tarkastelu on syntynyt prof. Pentikäisen huomautuksien perusteella, jossa majorointiperiaate ja kertymäfunktioiden leikkaamattomuuteen perustuva päätösvaihtoehtojen vertailu intuitiivisesti samastettiin toisiinsa. Myöhemmin tarkastellaan lyhyesti tilanteita, joissa tällainen samastaminen tulee kysymykseen.

Äärellisen perusjoukon tapauksessa tulos on triviaali:

$$\sum p(\omega_i) u_1(\omega_i) \leq \sum p(\omega_i) u_2(\omega_i), \text{ jossa } p(\omega_i) = P(\{\omega_i\}).$$

Majoriteettiperiaate voidaan kahden vakuutus sopimuksen a_1 ja a_2 tapauksessa tulkita seuraavasti:

Jos jokaisen mahdollisen tapahtuman (alkeistapahtuman ω) kohdalla erikseen vakuutus sopimus a_1 antaa huonomman tuloksen (pienemmän utiliteetin, $u_1(\omega) \leq u_2(\omega)$) kuin toinen vakuutus, niin ykkösvakuutus on kieltämättä huonompi. Tulos on aivan riippumaton mitä utiliteettiasteikkoa käytetään kunhan vain alkeistapahtumien hyvyysjärjestys pysyy ennallaan. Kyseessä on lähes itsestäänselvyys. Käytännössä ei ole tarjolla tämänkaltaisia vakuutus sopimuksia a_1 ja a_2 .

On ilmeistä, että satunnaismuuttujien $u_1 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ja $u_2 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ kertymäfunctiot $F_1(x) = P(u_1 \leq x) = P(\{\omega | u_1(\omega) \leq x\})$ ja $F_2(x) = P(u_2 \leq x)$ eivät leikkaa, vaan F_1 jää F_2 :n vasemmalle ("heikom-malle") puolelle, jos u_1 liittyy jokaiseen alkeistapaukseen ω pienemmän luvun kuin u_2 . Tämä todistetaan seuraavasti:

Koska $u_1(\omega) \leq u_2(\omega)$ kaikille $\omega \in \Omega$, niin $u_2(\omega) \leq y \Rightarrow u_1(\omega) \leq y$ kaikille $y \in \mathbb{R}$ ja $\omega \in \Omega$ ja siis

$$(11) \quad A_2(y) = \{\omega | u_2(\omega) \leq y\} \subseteq \{\omega | u_1(\omega) \leq y\} = A_1(y).$$

Koska $A_2 \subseteq A_1 \Rightarrow P(A_2) \leq P(A_1)$ niin myös

$$(12) \quad P(A_2(y)) = F_2(y) \leq F_1(y) = P(A_1(y)).$$

Tämä yhtälö sanoo, että F_1 jää F_2 :n vasemmalle puolelle.

Edellä on todistettu, ettei kertymäfunktioiden leikkaamattomuuteen perustuva järjestys ole koskaan ristiriidassa majorointiperiaatteen kanssa. Seuraava esimerkki osoittaa, että kertymäfunktioiden leikkaamattomuusperiaate on huomattavasti yleisempi kuin majorointiperiaate.

Poimitaan hatusta satunnaisesti yksi 40:stä kortista. Jokaiseen korttiin on merkitty kaksi positiivista lukua x_1 ja x_2 , vastaavasti punaisella ja sinisellä kynällä. Eräissä lapuissa x_1 on x_2 :ta suurempi, eräissä taas ei. Henkilö saa valita etukäteen pelaako hän "punaisella" vai "sinisellä" ja poimituaan kortin hatusta hän saa ko. värisen luvun ilmaisevan markkamäärän. Lukuparit on lueteltu seuraavassa taulukossa.

Taulukko 1. Punaisten ja sinisten lukujen arpajainen A1:

Kortin numero	Punainen luku x_1	Sininen luku x_2	Kortin numero	Punainen luku x_1	Sininen luku x_2
1	620	350	21	520	610
2	370	730	22	570	590
3	490	530	23	490	620
4	500	470	24	750	710
5	690	620	25	520	520
6	510	640	26	590	480
7	480	620	27	470	650
8	530	620	28	540	560
9	470	550	29	500	670
10	540	580	30	490	540
11	520	530	31	540	610
12	600	710	32	470	620
13	500	630	33	380	540
14	600	570	34	430	590
15	530	510	35	460	520
16	580	470	36	590	560
17	520	500	37	300	810
18	460	790	38	500	540
19	440	720	39	440	500
20	500	580	40	600	610

Jokainen rahasta pitävä utiliteettinsa odotusarvoa maksimoiva henkilö, jolle punaisten ja sinisten lukujen arpajaisten järjestelyt on selvitetty, tulee empimättä valita toinen vaihtoehto. Henkilön suhtautumisella raha- tai uhkapeleihin (esim. onko tämä "riskin karttaja" vai mahdollisesti "riskin ottaja") tai henkilön rahassa ko. alueella kasvavaksi oletetun utiliteettifunktion muodolla ei ole mitään vaikutusta valinnan tulokseen. Täysin irrelevanttia on myöskin se, että jos henkilö saa 1. lapun, saa punaista pelaava 270 mk enemmän kuin sinistä pelaava ja jos taas tulee 2. lappu, jää punaista pelaava huomattavasti tappiolle.

Tässä esimerkissä alkeistapauksina ω ovat kortit $1, \dots, 40$ eli $\Omega = \{1, 2, \dots, 40\}$. Kukin kortti i valitaan todennäköisyydellä $P(\{i\}) = p(i) = 1/40$. Majorointiperiaatetta ei voida soveltaa, koska lukujen $x_1(i)$ ja $x_2(i)$ ja siis myös niihin liittyvien utiliteettien järjestys vaihtelee kortista i toiseen. Kuitenkin toinen väreistä on toista edullisempi valinta riippumatta pelaajan rahan utiliteettifunktion muodosta. Lukijan tehtäväksi jää tutkia ja todistaa, kumpi väreistä on ainoa rationaalinen valinta.

Samat voittojen kertymäfunktiot voidaan tuottaa myös toisella laisilla arpajaisjärjestelyillä, joista seuraavassa tarkastellaan eräitä mahdollisuuksia.

- A2. Arpajaisten pitäjä nostaa pelaajan sijasta kortin ja näyttää vain sen numeron (punaisen tai sinisen), jolla henkilö pelaa. Toisen väristä numeroa ei pelajalle ilmoiteta.
- A3. Punaiset ja siniset numerot on merkitty eri kortteille, jotka ovat vastaavasti punaisessa ja sinisessä hatussa. Molemmista hatuista nostetaan yksi kortti, joista pelaaja valitsee toisen. Vain tämän kortin numero katsotaan.
- A4. Punaiset ja siniset numerot on järjestetty arpajaisissa A1 uudelleen taulukon 2 mukaisesti. Jokaisessa kortissa sininen numero on punaista pienempi.

Taulukko 2. Punaisten ja sinisten lukujen arpajainen A4:

Kortin numero	Punainen luku x_1	Sininen luku x_2	Kortin numero	Punainen luku x_1	Sininen luku x_2
1	300	350	21	510	590
2	370	470	22	520	590
3	380	470	23	520	610
4	430	480	24	520	610
5	440	500	25	520	610
6	440	500	26	530	620
7	460	520	27	530	620
8	460	520	28	540	620
9	470	520	29	540	620
10	470	530	30	540	620
11	470	530	31	570	630
12	480	540	32	580	640
13	490	540	33	590	650
14	490	540	34	590	670
15	490	550	35	600	710
16	500	560	36	600	710
17	500	560	37	600	720
18	500	570	38	620	730
19	500	580	39	690	790
20	500	580	40	750	810

Tuskin kukaan epäröisi arpajaisissa A4 valita sinistä väriä, sillä samassa kortissa esiintyvä punainen luku (joka on aina sinistä pienempi) muodostuu automaattisesti vertailukohteeksi. Tämä ei kuitenkaan ole välttämättä oikea (tai ainoa) vertailukohta, sillä jos pelaaja olisi sinisen sijaan pelannut punaisella, olisi valintatilanne ollut toinen eikä saman kortin olisi suinkaan tarvinnut tulla poimituksi. Tämä sinänsä mahdollinen ajattelutapa tuntuu kuitenkin sisältävän meistä melkoisen annoksen itämaista mystiikkaa.

On kuitenkin huomattava, ettei arpajaisissa A4 sinisen edullisuus tavanomaisen todennäköisyysteorian kannalta tarkasteltuna ole yhtään suurempi kuin muissakaan arpajaisissa, esimerkiksi A3:ssa. Kuitenkin on luultavaa, että suurin osa ihmisistä valitsisi mieluummin A3:n eo. arpajaisista, jos heidän täytyisi pelata punaisella. Tällöin ei kukaan (ei edes arpajaisten pitäjä) voisi tietää mahdollisesti saadun sinisen luvun suuruutta, jonka voi siis toivoa jäävän saatua punaista lukua pienemmäksi (paitsi jos punainen luku sattui olemaan 300). Tämä osoittaa, ettei ihmisten valinta vastaa tarkalleen tavanomaisen todennäköisyysteorian mukaista päättelyä, vaan siihen sisältyy joitakin mutkikkaampia erityispiirteitä. Psykologinen perustelu sille, että sinisen edullisuuden suhteen ihmisillä on taipumus asettaa esim. A4 A1:n ja A3:n edelle on seuraavanlainen: A4:ssä ei koskaan kannata vaihtaa saadussa lukuparissa siniseltä punaiselle, kun sensijaan A1:ssä se on tiettyjen korttien tapauksessa selvästi edullista. Arpajaisessa A3 taas punai-

sen kortin luku saattaa olla sinistä suurempi paitsi aivan suurimmilla sinisen luvun arvoilla. "Jälkiviisauden" mahdollisuus on A4:ssä eliminoitu (paitsi itämaisen mystikon tapauksessa), mutta muissa arpajaisissa sitä soveltaen voidaan punaisen subjektiivista epäedullisuutta hieman lievittää.

Koska punaisella tai sinisellä pelaaminen ovat toisensa poissulkevia valintavaihtoehtoja, ei asiallista virhettä tapahdu, jos eo. arpajaisten x_1 - ja x_2 -lukujen tosiasiallisten korrelaatioiden erot abstrahoidaan pois. Tällöin kaikkia arpajaisia A1-A4 pidetään pelaajan kannalta yhtäpitävinä, vaikka esimerkiksi A3:ssa muuttujat x_1 ja x_2 ovat täysin toisistaan riippumattomia ja A4:ssä ne ovat voimakkaasti positiivisesti korreloituneita. Jos kaikkia esitettyjä arpajaisia pidetään asiallisesti yhtäpitävinä, voidaan punaisen ja sinisen vertailu perustaa A4:n analysointiin. Vain arpajaisiin A4 voidaan soveltaa majorointiperiaatetta, jonka avulla suoraan havaitaan punaisella pelaaminen edullisemmaksi. Muuttujien x_1 ja x_2 kertymäfunktiot $F_1(x)$ ja $F_2(x)$ ovat konstruktion perusteella identtiset esimerkiksi arpajaisissa A1 ja A4. Jälkimmäisessä lisäksi $x_1(i) < x_2(i)$ kaikilla korttien i arvoilla, joten $F_1(x) > F_2(x)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$ ja siis kertymäfunktioiden leikkaamattomuusperiaatteen nojalla $EU(\underline{x}_1) < EU(\underline{x}_2)$, jossa $U(x)$ on mielivaltainen x :n kasvava funktio (utiliteetifunktio). Majorointiperiaatteen avulla voidaan myös arvioida suoraan eri kortteja i kun pelataan väriä 1 tai 2 eli tarkastella funktioita $u_1(i) = U(\underline{x}_1(i))$ ja $u_2(i) = U(\underline{x}_2(i))$.

Näille pätee $U(x)$:n kasvavuuden perusteella $u_1(i) < u_2(i)$ kaikilla korteilla i ja mielivaltaisen $U(x)$:n tapauksessa. Siten majorointiperiaate antaa suoraan $Eu_1 < Eu_2$, mikä on merkintöjä vaille sama tulos kuin $EU(x_1) < EU(x_2)$. Tämä päättely on suoritettavissa vain arpajaisten A4 tapauksessa. Sensijaan tulos $EU(x_1) < EU(x_2)$ pätee kaikissa arpajaisissa x_1 :n ja x_2 :n kertymäfunktioiden leikkaamattomuuden perusteella.

Jos x_1 ja x_2 ovat kahteen mielivaltaiseen arpajaiseen liittyvät arpajaisvoittoa kuvaavat muuttujat, voidaan määritellä uusi "yhdistetty arpajainen", jossa satunnaisesti poimittua arpaa kuvataan välin $[0,1]$ luvulla a ja arpaa a vastaa aina lukupari $(\tilde{x}_1(a), \tilde{x}_2(a))$ siten, että

- (1) molemmat muuttujat $\tilde{x}_i(a)$ ovat a :n kasvavia (ei-väheneviä) funktioita
- (2) muuttujien kertymäfunktio $F_i(x) = P(x_i \leq x)$ yhdistetyssä arpajaisessa ovat samat kuin alkuperäisissä arpajaisissa.

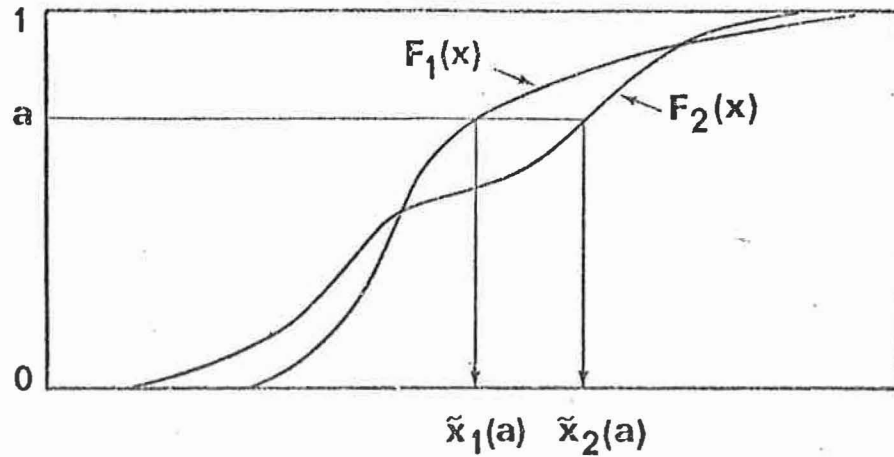
Arvan tunnus a voidaan tulkita tällöin arvan suhteelliseksi järjestysnumeroksi ja sekä 1-arpajaisen että 2-arpajaisen voitot $\tilde{x}_1(a)$ ja $\tilde{x}_2(a)$ kasvavat arvan suhteellisen järjestysnumeron kasvaessa. Arpojen poimintatodennäköisyyksien ei tarvitse olla samoja alkuperäisten arpajaisten eri arvoille (kuten edellä, jossa $p(a_i) = 1/40$ kaikissa arpajaisissa), vaan ne voivat vaihdella mielivaltaisesti arvasta ja arpa-

jaisesta toiseen. Ei edes tarvitse olettaa, että eri arpoja a on äärellinen määrä, sillä a sekä muuttujat $\underline{x}_1(a)$ ja $\underline{x}_2(a)$ voivat olla jopa jatkuvia tai sekatyypin satunnaismuuttujia, ks. Vasama-Vartia (1972, s. 197). Tällöin ei arpa-jaisia tosin enää voida realisoida "lappujen poimintana hatusta", vaan a :n arvot on generoitava yleisemmän satunnaismekanismin avulla.

Jatkuvan muuttujan $\underline{x}_i$ tapauksessa käytetty menettelytapa tunnetaan ns. todennäköisyysintegraalitransformaationa, jota käytetään yleisesti haluttua jatkuvaa jakaumaa noudattavan muuttujan realisaatioiden generoimiseen. Halutaan siis generoida kertymäfunktion $F_i(x)$ määräämää jatkuvaa jakaumaa noudattavan satunnaismuuttujan $\underline{x}_i$ havaintoarvoja. Tämä voidaan suorittaa siten, että "poimitaan" väliltä $[0,1]$ luku a tasaisella todennäköisyydellä, siis a noudattaa välin $[0,1]$ tasajakaumaa. Tällöin a :n muunnoksen $\tilde{x}_i = F_i^{-1}(a)$ kertymäfunktio on $F_i(x)$ eli sama kuin $\underline{x}_i$:n haluttu kertymäfunktio. Tämä nähdään suoralla laskulla: $P(\tilde{x}_i \leq x) = P(F_i^{-1}(a) \leq x) = P(a \leq F_i(x)) = F_i(x)$, koska $P(a \leq a) = a$, kun $a \in [0,1]$.

Arvan suhteelliseen järjestysnumeroon a liitetään siis eo. konstruktiossa muuttujaparin $(\tilde{x}_1(a), \tilde{x}_2(a))$ arvo ja ao. muuttujien kertymäfunktiot ovat konstruktion perusteella $F_1(x)$ ja $F_2(x)$ eli samat kuin $\underline{x}_1$:n ja $\underline{x}_2$:n kertymäfunktiot. Menettelyä on havainnollistettu kuviossa 4.

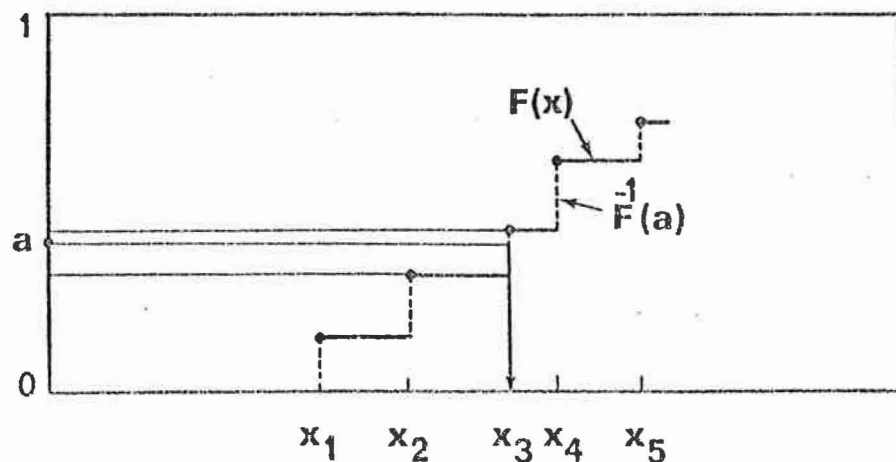
Kuvio 4. Yhdistetyn arpajaisen generointi



Edellä on oletettu, että $F_1(x)$ ja $F_2(x)$ olivat jatkuvia, jolloin niillä oli yksikäsitteiset käänteisfunktiot.

Kuitenkin vastaavan menettelyn avulla voidaan generoida myös epäjatkuvan tai sekatyypin satunnaismuuttujan arvoja, vaikka menettely ei lienekään yleisesti tunnettu. Epäjatkuvan muuttujan tapauksessa se on kuvion perusteella lähes itsestäänselvyys.

Kuvio 5. Annetun epäjatkuvan kertymäfunktion $F(x)$ määräämää jakaumaa noudattavan satunnaismuuttujan arvojen generointi



Koska $F(x)$:n hyppäys $\underline{x}$:n mahdollisen arvon x_i kohdalla on juuri x_i -luvun todennäköisyys, $p(x_i) = P(\underline{x} = x_i) = F(x_i) - F(x_i - 0)$, niin kuviossa esitetty tasaisesti välillä $[0,1]$ jakautunut a -muuttuja sattuu tiettyä havaintoarvoa x_i vastaavan $F(x)$:n hyppäyksen kohdalle juuri todennäköisyydellä $p(x_i)$. Aina kun a sattuu tietyn hyppäyksen kohdalle generoituu vastaava x_i -arvo.

Algebraallinen esitys on hieman hankalampi. Kuviossa pilkkuviivalla osoitetut $F(x)$:n hyppäykset määrittelevät eräänlaisen $F(x)$:n "yleistetyn inverssin" $\bar{F}^1(a)$, joka on määriteltä kaikilla $a \in [0,1]$ eikä vain $F(x)$:n arvojoukossa. Määritellään

$$\bar{F}^1(a) = \sup\{x \mid F(x) \geq a\}$$

eli $\bar{F}^1(a)$ on pienin luvuista x , joille $F(x) \geq a$. Tämä on haluttu algebraallinen esitys. Jos $F(x)$ on jatkuva niin $\bar{F}^1(a) = F^{-1}(a)$. Erityisesti jos $\underline{a}$ noudattaa välin $[0,1]$ tasajakaumaa niin $\tilde{x}_1 = \bar{F}^1(a)$ noudattaa jakaumaa, jonka kertymäfunktio on $F(x)$. Tämä pätee jatkuville, epäjatkuville ja jopa sekatyypin jakaumille.

Jos siis $\underline{a}$ on arvon suhteellinen järjestysluku, niin pari $(\tilde{x}_1(a), \tilde{x}_2(a)) = (\bar{F}_1^1(a), \bar{F}^1(a))$ määrittelee yleistetyn arpa-jaisen, jossa $\tilde{x}_1(a)$ ja $\tilde{x}_2(a)$ ovat a :n ei-väheneviä funktioita ja $\tilde{x}_1$:n ja $\tilde{x}_2$:n kertymäfunktiot ovat halutut mielivaltaiset (jopa sekatyypin) kertymäfunktiot $F_1(x)$ ja $F_2(x)$.

Oletetaan erityisesti, että $F_1(x)$ ja $F_2(x)$ eivät leikkaa ja esim. $F_1(x)$ on $F_2(x)$:n vasemmalla puolella, jolloin siis alkuperäisten arpajaisten voitoista 2-arpajaisiin liittyvä voitto $\underline{x}_2$ "dominoi stokastisesti" 1-arpajaisten voittoa $\underline{x}_1$. Tällöin yhdistetyssä arpajaisessa voittojen välillä pätee kaikilla mahdollisilla a :n arvoilla majorointiperiaate, $\tilde{x}_1(a) \leq \tilde{x}_2(a)$, ja samalla $\tilde{x}_1$:n ja $\tilde{x}_2$:n jakaumat ovat samat kuin alkuperäisten arpajaisten voitoilla.

Näin siis mielivaltaisen kahden muuttujan $\underline{x}_1$ ja $\underline{x}_2$ tapauksessa (joista $\underline{x}_2$ on stokastisesti parempi kuin $\underline{x}_1$) voidaan määritellä satunnaismekanismi, jossa generoidaan muuttujapari $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ siten, että muuttujien jakaumat säilyvät mutta stokastinen dominanssi muuttuu realisaatiokohtaiseksi majoroinniksi, $\tilde{x}_1(a) \leq \tilde{x}_2(a)$. Vaikka siis realisaatiokohtainen majorointi on huomattava erikoistapaus stokastisesta dominanssista voidaan ne samastaa tietynluonteisissa satunnaishilmiöissä, joissa parin $(\underline{x}_1, \underline{x}_2)$ riippuvuusominaisuuksia (esim. korrelaatiota) voidaan muuttaa ilman, että satunnaishilmiön luonnetta tai oleellisia piirteitä tarvitsee tällöin katsoa muutetuksi. Esimerkkinä tämänluonteisista satunnaishilmiöistä tarkasteltiin edellä erilaisia arpajaisia A1-A4, jossa muutettiin punaisella ja sinisellä pelaavien voittojen riippuvuusominaisuuksia.

Eri vakuutus sopimusten yhteydessä odotettavissa olevien utiliteettien jakaumien (ks. kuvio 1) vertailussa ei majorointiperaate tule kysymykseen vaan on käytettävä yleisempää kertymäfunktioden leikaamattomuuteen perustuvaa ns. dominanssiperiaatetta, ks. liite. Tämä johtuu siitä, että mahdollisiin tilanteisiin C_i

liittyvät ehdolliset utiliteetit $u(C_i|a_k)$ eivät käytännössä voi toteuttaa ehtoa $\forall i : u(C_i|a_k) \geq u(C_i|a_\ell)$ millään vakuutuksilla a_k ja a_ℓ , vaikka vastaavilla utiliteettien kertymäfunktioilla dominanssiehto $\forall u \in \mathbb{R} : F(u|a_k) \geq F(u|a_\ell)$ olisikin voimassa.

Joka tapauksessa mikä tahansa päätösvaihtoehto (vakuutus sopimus), jota parempi vaihtoehto stokastisen dominanssin mielessä on olemassa voidaan ilman muuta karsia pois harkittavien vaihtoehtojen joukosta, vrt. myös Vartia (1973, s. 35-51). Tällä perusteella voidaan karsia useita vakuutus sopimuksia, joihin liittyvät odotettavien utiliteettien jakaumat on esitetty kuviossa 1.

Sen sijaan vakuutus sopimuksien a_0 , a_1 ja a_2 edut ja haitat on todella punnittava keskenään, koska niiden utiliteettien kertymäfunktiot leikkaavat toisensa. Mitään näistä vakuutus sopimuksista ei voida pitää kaikissa tilanteissa muuta parempana, vaan kaikki vakuutus sopimusten a_0 , a_1 ja a_2 keskinäiset paremmuusjärjestykset ovat periaatteessa mahdollisia. Koska välttämättä $a_2 \succ a_3$ voidaan a_3 jättää pois tarkasteluista, vaikka se voikin olla parempi kuin kumpi tahansa vakuutus sista a_0 ja a_1 . Riittää siis, että ensin karsitaan pois ne vaihtoehdot, joita vastaavat kertymäfunktiot ovat kokonaan jonkun muun kertymäfunktion vasemmalla puolella ja sen jälkeen tarkastellaan vain jäljelle jääviä vaihtoehtoja, joiden kertymäfunktiot leikkaavat toisensa.

Vakuutuksenottajan arvostusperiaatteista riippuu mihin järjestykseen hän jäljelle jäävät vakuutus sopimukset a_0 , a_1 ja a_2 asettaa. Jos b haluaa ensisijaisesti välttää pieniä utiliteetteja eikä pidä a_2 :n keskimääräisen utiliteetin pienuutta ratkaisevana puutteena, asettaa hän a_2 :n sekä a_1 :n että a_0 :n

edelle: $a_2 > a_1$ ja $a_2 > a_0$. Vaihtoehtojen a_0 , a_1 ja a_3 keskinäisellä järjestyksellä ei tällöin ole merkitystä: a_2 on joka tapauksessa paras vaihtoehto. Jos taas b haluaa lähinnä välttää pahoihin onnettomuuksiin liittyviä pieniä utiliteetteja asettanee hän a_1 :n vaihtoehtojen a_0 ja a_2 edelle. Tällöin hän säilyttää suureksi osaksi a_0 :ssa esiintyvän mahdollisuuden päästä korkeisiin hyvinvoinnin tasoihin, mutta välttää pahoihin onnettomuuksiin liittyvät pienet utiliteetin tasot.

Useat päätöksentekijät pystynevät kuvion 1 kaltaisesta esityksestä muodostamaan mielipiteensä vaihtoehtojen keskinäisestä paremmuusjärjestyksestä tai ainakin tunnistamaan mielestään parhaimman vaihtoehdon. Arvostamisen helpottamiseksi voidaan utiliteettiasteikolle merkitä näkyviin, mitä konkreettisia onnettomuustilanteita tietyt utiliteetti-arvot vastaavat.

On syytä korostaa, että edellä esitetyssä tarkastelutavassa edellytetään vain, että tulevaisuudenkuvat (C_i, a_k) voidaan asettaa miellyttävyyssjärjestykseen. Utiliteettiasteikko voidaan valita ehdon (1) puitteissa muuten mielivaltaisesti. Tarkastelun lähtökohtana on siis oletus, että ordinaalinen utiliteettifunktio tulevaisuudenkuville voidaan konstruoida. Tämä ei ole kovinkaan rajoittava edellytys, vaan tarkastelutapaa ilmeisesti voidaan soveltaa useissa käytännön tilanteissa. Lisäetuna esitetyssä menettelytavassa on, ettei siinä tarvita hankalia matemaattisia käsitteitä, joita päätöksentekijän on ehkä vaikea ymmärtää. Menetelmä on kuvaileva luonteeltaan

ja sen voi maallikkokin ymmärtää. Ehkä oleellisin piirre siinä on, että vaihtoehtojen $a_k \in A$ arvostaminen on jätetty päätöksentekijälle: vain informaatio arvostamista varten on pyritty esittämään helppotajuisessa, mutta täsmällisessä muodossa. Päätöksentekoteorian mielessä ongelmaa ei näin ollen ole vielä ratkaistu, mutta edellä se on jaettu loogisiin osiin, jotka nähdäkseni auttavat ymmärtämään ongelman luonnetta sekä kirjallisuudessa esiteltyjä usein maattisesti vaikeatajuisia ratkaisuyrityksiä. Seuraavassa luvussa tarkastellaan, millä edellytyksillä utiliteetin odotusarvoon perustuvaa arvostusmenetelmää voidaan soveltaa jäljelle jääneiden vaihtoehtojen keskinäisen edullisuuden vertailuun.

5. UTILITEETIN ODOTUSARVOON PERUSTUVA VAKUUTUSSOPIMUSTEN VERTAILU

Päätöksentekoteoriassa edellytetään usein, että päätöksentekijä asettaa harkitsemansa vaihtoehdot $a_k \in A'_{b,t}$ paremmuusjärjestykseen kiinnittäen huomiota ainoastaan vaihtoehtoihin liittyvien utiliteettien jakaumien odotusarvoihin eli vaihtoehtojen tuottamiin keskimääräisiin utiliteetteihin. Menettely olisi hyvin luonteva, mikäli utiliteettien jakaumat (vrt. kuvio 1) poikkeaisivat toisistaan vain sijainniltaan (keskiarvoltaan, odotusarvoltaan), jolloin jakaumat saataisiin yhtymään toisiinsa siirtämällä niitä asteikolla.

Mutta yleensä utiliteettien jakaumat eivät ole näin samankaltaisia, vaan keskiarvojen lisäksi jakaumien hajonnat, viinoudet jne. vaihtelevat, kuten edellä kuviossa 1. On ilmeistä, ettei ole mielekästä perustaa vaihtoehtojen a_k paremmuusjärjestystä tulevaisuudenkuvien (C_i, a_k) mielivaltaisen ordinaalisen utiliteetin $u^b(C_i | a_k)$ odotusarvoon $g(a_k) = \sum u^b(C_i | a_k) p(C_i)$. Lukujen $g(a_k)$ järjestys nimittäin tavallisesti riippuu ordinaalisen utiliteettifunktion $u^b(C_i | a_k)$ valinnasta. Jos nimittäin $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ on kasvava funktio, on myös $\bar{u}^b(C_i | a_k) = h(u^b(C_i | a_k))$ edellisen esimerkin järjestysehdon (1) toteuttava ordinaalinen utiliteettifunktio ja sen odotusarvo on $\bar{g}(a_k) = \sum \bar{u}^b(C_i | a_k) p(C_i)$. Tavallisesti odotusarvojen $g(a_k)$ ja $\bar{g}(a_k)$ (joissa $a_k \in A'_{b,t}$) järjestykset poikkeavat toisistaan, eikä siis vaihtoehtojen paremmuusjärjestystä voida näin määrätä yksikäsitteisesti. Voidaan osoittaa, että jos kahteen vaihtoehtoon (esim. a_1 ja a_2) liittyvien utiliteettien kertymäfunktiot F_1 ja F_2 leikkaavat, mikä on ordinaalisen utiliteettiasteikon valinnasta riippumaton ominaisuus, niin odotusarvojen $\bar{g}(a_1)$ ja $\bar{g}(a_2)$ järjestys riippuu funktion h ja siis utiliteettiasteikon valinnasta. Vain jos kertymäfunktiot F_1 ja F_2 eivät leikkaa toisiaan, vaan esimerkiksi F_1 on F_2 :n vasemmalla puolella (eli $F_1(x) \geq F_2(x)$ kaikilla x :illä), niin $\bar{g}(a_1) \leq \bar{g}(a_2)$ riippumatta utiliteettiasteikon valinnasta. Tällöin a_1 pysyy a_2 :ta huonompana vaihtoehtona, vaikka kasvava h -funktio valittaisiin miten tahansa. Tämä tärkeä tulos on todistettu liitteessä.

Jos esimerkiksi utiliteettien jakaumat ovat siirtoa vaille samat, niin kertymäfunktioit F_1 ja F_2 eivät leikkaa toisiaan ja lukujen $\bar{g}(a_1)$, $\bar{g}(a_2)$ järjestys on utiliteettiasteikon valinnasta riippumaton. On syytä korostaa, että tarkastelu koskee utiliteettien kertymäfunktioita, ei tiheysfunktioita tai frekvenssifunktioita, jotka lähes aina ovat päällekkäisiä, siis "leikkaavat toisensa".

Vakuutuksenottaja b tarkastelee siis vakuutus sopimuksia $a_1, \dots, a_K$ joita vastaavien utiliteettien kertymäfunktioista yksikään ei ole kokonaan minkään toisen KF:n vasemmalla puolella. Vakuutuksenottajan oletetaan maksimoivan odotettavaa utiliteettiaan. Hän siis määrää vakuutus sopimuksia vastaavat hyvyysindikaattorit $g^b(a_k)$ kaavalla

$$(13) \quad g^b(a_k) = \sum_{i=1}^I p(C_i) u^b(C_i | a_k),$$

ts. utiliteettien $u^b(C_i | a_k)$ odotusarvona. Laskentakehikko voidaan esittää seuraavana taulukkona.

Päätösvaihtoehdot $A'_{b,t}$ eli vakuutus sopimukset	Tulevaisuudennäkymien luokittelussa käytetyt tapahtumat				Vakuutus- sopimusten hyvyysindi- kaattorit
	C_1	C_2		C_I	$g^b(a_k)$
a_0	$u^b(C_1 a_0)$	$u^b(C_2 a_0)$		$u^b(C_I a_0)$	$g^b(a_0)$
a_1					
$\vdots$					
a_K	$u^b(C_1 a_K)$	$u^b(C_2 a_K)$		$u^b(C_I a_K)$	$g^b(a_K)$

Vakuutus sopimuksien paremmuusjärjestys määrätään tässä menetellyssä niitä vastaavien utiliteettien kertymäfunktioiden (ks. kuvio 1) odotusarvojen avulla. Menettelytapa edellyttää, että tulevaisuudenkuvien (C_i, a_k) miellyttävyysjärjestystä mittaava utiliteetti konstruoidaan erityisesti tätä tarkoitusta varten. Mikä tahansa ordinaalinen utiliteettifunktio ei kelpaa. Siirrytään tarkastelemaan mitä lisävaatimuksia ehdon (11) lisäksi utiliteettin on tässä menettelytavassa täytettävä.

Jos $u^b(C_i | a_k)$ -arvojen valitsemista rajoitetaan lisäehdoilla, jotka määräävät nämä lineaarista muunnosta

$$(14) \quad \bar{u}^b(C_i | a_k) = \alpha u^b(C_i | a_k) + \beta, \quad \alpha > 0$$

vaille, määräytyvät myös $g^b(a_k)$ -luvut samaa muunnosta vaille yksikäsitteisesti:

$$(15) \quad \bar{g}^b(a_k) = \alpha g^b(a_k) + \beta$$

Tämä merkitsee sitä, että sekä utiliteetit $u^b(C_i | a_k)$ että hyvyysindikaattori $g^b(a_k)$ ovat intervalliasteikolla mitattavia suureita, kuten esimerkiksi esineiden paikkakoordinaatit, aika ja tavanomaiseen tapaan (ei siis Kelvin-asteikolla) mitattu lämpötila.

Tarkastettua ongelmaa ja ehtoja, joita utiliteettifunktion $u^b(C_i | a_k)$ tulee täyttää, on runsaasti tarkasteltu päätöksentekoteoriassa, ks. esim. Luce & Raiffa (1957), Neuman & Morgenstern (1947).

Ehdon (11) toteuttavan utiliteettifunktion on oltava lisäksi sellainen, että utiliteettien erotuksien $u^b(C_i|a_k) - u^b(C_j|a_l)$ on mitattava kvantitatiivisesti parien (C_i, a_k) ja (C_j, a_l) välistä miellyttävyyseroa, vrt. Vasama & Vartia (1972, s. 46-48).

Eräs menettelytapa vertailujen suorittamisessa on käyttää jo aiemmin mainittua todennäköisyysvaakaa (ks. TN. s. 24), jolloin lisäksi β asettuu nolllaksi. Tämä voidaan suorittaa seuraavasti. Olkoon (C_{i1}, a_{k1}) miellyttävin ja (C_{i0}, a_{k0}) epämiellyttävin tulevaisuudenkuva, jolloin kaikille muille tulevaisuudenkuville (C_i, a_k) pätee

$$(16) \quad (C_{i1}, a_{k1}) \succ (C_i, a_k) \succ (C_{i0}, a_{k0}).$$

Tehtävänä on määrätä mihin kohtaan vertailtava tulevaisuudenkuva (C_i, a_k) asettuu epämiellyttävimmän ja miellyttävimmän kehitysmahdollisuuden välissä. Kysytäänkin siksi, mikä on sellainen nollan ja yhden välissä oleva luku $\Pi(C_i|a_k)$, että $b:n$ mielestä on yhdentekevää toteutuuko tarkasteltava tulevaisuudenkuva vai sellainen arpomalla aikaansaatu tulevaisuudennäkymä, jossa b todennäköisyydellä $\Pi(C_i|a_k)$ pääsee miellyttävimpään tulevaisuudenmahdollisuuteen (C_{i1}, a_{k1}) ja todennäköisyydellä $1-\Pi(C_i|a_k)$ joutuu epämiellyttävimpään mahdollisuuteen (C_{i0}, a_{k0}) . Jos esimerkiksi $\Pi(C_1|a_0) = 1/2$ niin (C_1, a_0) on 'puolivälissä' miellyttävimmän ja epämiellyttävimmän mahdollisuuden määräämällä asteikolla. Tällöin $b:n$ mielestä on yhdentekevää toteutuuko (C_1, a_0) vai heitetäänkö rahaa siitä, kumpaan äärimahdollisuuteen hän joutuu.

Näin saadut luvut $\pi(C_i|a_k)$ toimivat utiliteetteina $u^b(C_i|a_k)$ ja vakuutus sopimuksen hyvyysindikaattoriksi saadaan

$$(17) \quad g^b(a_k) = \sum p(C_i) \pi(C_i|a_k).$$

Tämä on nollan ja yhden välissä oleva luku, joka kertoo miten tulevaisuudennäkymä $h^{(b)}(t \rightarrow |a_k)$ sijoittuu miellyttävimmän ja epämiellyttävimmän mahdollisuuden määräämällä asteikolla. Itse asiassa $b:n$ tulevaisuudennäkymä $h^{(b)}(t \rightarrow |a)$ on $b:n$ mielestä samanarvoinen, kuin mahdollisuus osallistua arpajaisiin (peliin), jossa todennäköisyydellä $g^b(a_k)$ hän pääsee miellyttävimpään ja todennäköisyydellä $1-g^b(a_k)$ joutuu epämiellyttävimmäksi arvioimaansa tilanteeseen.

Tarkastellaan vakuutus sopimusten arvostamista lopuksi numeerisen esimerkin avulla, jossa tulevaisuudennäkymien luokittelussa käytetään 5 tapahtumaa $C_1, \dots, C_5$. Nämä on määritelty siten, että wait and see - vaihtoehdon tapauksessa $(C_1, a_0) \prec \dots \prec (C_5, a_0)$ vaatien lisäksi, että peräkkäisten tapahtumien miellyttävyys-erot ovat likimain yhtä suuret. Tätä kuvastavat wait and see - vaihtoehtoon liittyvät "hyvinvoinnin asteet" 0,00, 0.25, 0.50, 0.75 ja 1.00 sekä niiden kielelliset vastineet "hyvin epämiellyttävä", ..., "hyvä". Varsinaisen vakuutus sopimuksen a_k tapauksessa lisääntyy $b:n$ hyvinvointi a_0 -tilanteen hyvinvointiin verrattuna tietyssä C_i -luokassa, mikäli vakuutuskorvaus ylittää vakuutusmaksun ja vähenee vastakkaisessa tapauksessa. Esimerkiksi C_2 -luokassa halvan vakuutus sopimuksen tapauksessa vakuutuskorvaus ylittää maksun 650 markalla ja b katsoo hyvinvointinsa lisääntyvän a_0 -

TAULUKKO 3. VAKUUTUSSOPIMUKSIA VASTAAVIEN TULEVAISUUDENKUVIEN ARVOSTAMINEN JA VERTAILU

VAKUUTUSSOPIMUKSET		ONNETTOMUUSLUOKAT JA NIIDEN TODENNÄKÖISYYDET					KESKIARVOT
		C ₁	C ₂	C ₃	C ₄	C ₅	
		1 %	4 %	15 %	40 %	40 %	
A ₀ "WAIT AND SEE"	KORVAUS	0	0	0	0	0	0
	MAKSU	0	0	0	0	0	0
	HYVINVOINNIN ASTE	0.00	0.25	0.5	0.75	1.0	0.785
		HYVIN EPÄMIELL.	EPÄMIELLYTTÄVÄ	KOHTALAINEN	MELKO HYVÄ	HYVÄ	MELKO HYVÄ
A ₁ "HALPA"	KORVAUS	2000	800	300	70	0	125
	MAKSU	150	150	150	150	150	150
	HYVINVOINNIN ASTE	0.25	0.35	0.53	0.74	0.98	0.784
A ₂ "TAVALLINEN"	KORVAUS	5000	2000	800	125	0	300
	MAKSU	350	350	350	350	350	350
	HYVINVOINNIN ASTE	0.35	0.50	0.58	0.74	0.97	0.795
A ₃ "KALLIS"	KORVAUS	10000	4000	1600	250	0	600
	MAKSU	700	700	700	700	700	700
	HYVINVOINNIN ASTE	0.40	0.55	0.60	0.73	0.95	0.788

tapauksen 0.25:stä 0.35:een. Saman suuruisen hyvinvoinnin tason b katsoo liittyvän tilanteeseen (C_1, a_3) . Hyvinvoinnin asteet voidaan ajatella saaduiksi todennäköisyysvaakaa käyttäen, joten esimerkiksi vaihtoehto (C_1, a_3) on b :n mielestä samanarvoinen, kuin sellainen mahdollisuus, jossa miellyttävin tulevaisuudenkuva (C_5, a_0) toteutuu todennäköisyydellä 0.35 ja epämiellyttävin (C_1, a_0) todennäköisyydellä 0.65.

Havaitsemme, että b :n hyvinvointi vaihtelee eniten a_0 -vaihtoehdossa ja sen vaihtelu pienenee vakuutus sopimuksen kallistuksessa. Samalla tosin suurin hyvinvointi myös pienenee vakuutusmaksun kohotessa. Kuitenkaan b :n mielestä halpaan vakuutukseen liittyvä tulevaisuudennäkymä ei ole a_0 :aan liittyvää tulevaisuudennäkymää miellyttävämpi, vaan ne ovat oleellisesti samanarvoiset, $0.784 \approx 0.785$. Paras vaihtoehto on b :n mielestä tavallinen vakuutus, johon liittyvä keskimääräinen hyvinvoinnin aste on 0.795. Tämä on selvästi suurempi kuin esim. kalliin vakuutuksen keskimääräinen hyvinvoinnin aste 0.788, joka tosin on b :n harkitsemien vakuutus sopimusten joukossa $A'_{b,t} = \{a_0, a_1, a_2, a_3\}$ toiseksi paras vaihtoehto. Vakuutus sopimusten miellyttävyyssjärjestys on siten: $a_1 \sim a_0 < a_3 < a_2$.

6. YHTEENVETO

On ilmeisesti mahdotonta redusoida esimerkiksi tapaturmavakuutuksen valintaongelmaa vain varallisuuden (tai tulojen ja menojen) tarkasteluun. Koska tulojen ja menojen hyvinvointivaikutukset riippuvat oleellisesti siitä tilanteesta (edellä onnettomuus-

luokasta C_i), johon ne sattuvat, on tulot ja menot eriteltävä onnettomuusluokittain. Rahasuureiden lisäksi on siis onnettomuuden vakavuusaste huomioitava korrektisti tapaturmavakuutuksia vertailtaessa ja arvostettaessa. Pelkästään rahasuureissa tapahtuva tarkastelu lienee mahdollista vain esim. yrittäjän vakuutuksen tapauksessa, joissa tulevaisuudenkuvat riippuvat pääasiallisesti odotettavista tuloista. Yrittäjän satunnaisten tulovirran arvostamista sekä tulovirran jakauman muuttamista esim. vakuuttamisen tai rahapeleiksi tulkittavien sijoitusten avulla voidaankin kuvata yksinkertaisemmilla uhkapeliteoriassa sovellettujen matemaattisten mallien avulla. Sensijaan tapaturmavakuutuksia kuvailtaessa ja arvostettaessa on sovellettava mutkikkaampaa ja yleisemmin sovellutuskelpoista päätöksentekoteoriaa. Tutkimuksessa on käytetty Törnqvistin ja Nordbergin (1968) kehittämää päätäntätieteen käsitteistöä.

Tapaturmavakuutuksien analysoinnissa varsinaisen vaikeuden muodostaa eri vakuutus sopimuksiin a_k liittyvien tulevaisuuden näkymien $h^{(b)}(t \rightarrow |a_k)$ kuvailu eli niiden jakaminen yksinkertaisempiin tulevaisuuden kuviin $h^{(b)}(t \rightarrow |C_i, a_k)$ ($i = 1, \dots, I$), joiden voidaan katsoa toteutuvan a_k :sta riippumatta tietyillä arvioitavissa olevilla todennäköisyyksillä $p(C_i)$. Kun tämä kuvailu on ensin onnistuneesti suoritettu, on sen jälkeen tulevaisuudenkuvat $h^{(b)}(t \rightarrow |C_i, a_k)$ arvostettava eli asetettava epämiellyttävyyss-miellyttävyyss-järjestykseen, joka edelleen esitetään utiliteettiarvojen $u(C_i | a_k)$ avulla. Kutakin vakuutus sopimusta vastaa tällöin eräs utiliteettien jakauma, joka kertoo, missä määrin enemmän tai vähemmän epämiellyttäviä tilanteita on ko. vakuutus sopimuksen tapauksessa odotettavissa.

Edellä lyhyesti hahmoteltuja vaikeita ongelmia ei voida realistiseen analyysiin pyrittäessä sivuuttaa, vaan ne on jokaisessa ratkaisuyrityksessä ratkaistava ja ratkaistu enemmän tai vähemmän puutteellisella tavalla - näin tapahtuu silloinkin, kun nämä vaikeudet yritetään kätkeä ratkaisuyrityksen teknisiin yksityiskohtiin. Tapaturmavakuutusten tapauksessa tulevaisuudennäkymien kuvailu on vaikeaa lähinnä sen vuoksi, että vakuutuksen oleelliset vaikutukset voivat ulottua kauaksikin tulevaisuuteen ja lisäksi vakuutuskorvausten suorittaminen on sidottu poikkeuksellisten tapahtumien (onnettomuuksien) esiintymiseen. Tämä edellyttää aikaulottuvuuden ja sattuman samanaikaista tarkastelua - tiukasti tulkiten siis stokastisten prosessien alueeseen kuuluvia tarkasteluja.

Tulevaisuudennäkymien stokastisten prosessien puitteissa tapahtuvaan kuvailuun ei ole edellä ryhdytty, mutta tällä alueella löytyy kiinnostavia ja haastavia tutkimusongelmia.

Eri vakuutus sopimusten vertailu ja arvostaminen suoritettiin tutkimuksessa subjektiivisiin tulevaisuudenkuviin $h^{(b)}(t \rightarrow |C_i, a_k)$ liitettyjen utiliteetti arvojen $u(C_i | a_k)$ todennäköisyysjakauman avulla. Tätä jakaumaa kuvaava kertymäfunktio $F(u | a_k)$ kertoo, missä määrin vakuutus sopimuksen a_k tapauksessa enemmän tai vähemmän epämielilyttäviä tilanteita b odottaa esiintyvän tulevaisuudessa. Tutkimuksen keskeinen lähtökohta on, että vakuutus sopimuksia käytännössä harkittaessa ja vertailtaessa vakuutuksenottaja luontaisesti, mutta luonnollisesti karkealla tavalla erittelee päätösongelmaansa edellä kuvattua laskentakehikkoa vastaavalla

tavalla. Vakuutuksenottaja siis arvioi, missä määrin tietyn vakuutus sopimuksen avulla voidaan mahdollisiin onnettomuuksiin liittyviä elinolosuhteiden heikkenemisiä lievittää ja vastaako tämä positiivinen vaikutus vakuutusmaksujen aikaansaamaa varsin kohtuullista ja helposti arvioitavaa taloudellista menetystä. Tämä tarkastelutapa poikkeaa ainakin käsitteellisesti varsin huomattavasti tavanomaisesta vakuutus sopimusten analysointitavasta, jossa vakuutusten luonnehditaan vähentävän odotettavia "riskejä". Riskin käsite on normaalisti määriteltä varsin epäselvästi ja eri yhteyksissä keskenään ristiriitaisilla tavoilla, ks. esim. Laurila (1977, s. 9-22) ja Elliot & Waughan (1972). Ainakaan vakuutus sopimukset eivät normaalisti pienennä onnettomuuksien C_i todennäköisyyksiä $p(C_i)$ eli vähennä riskiä tässä mielessä.

Selkeä ero on myös yritetty tehdä vakuutus sopimuksien ja uhkapelien analysoinnin välillä. Uhkapelien yhteydessä tarkastellaan vain satunnaisia rahallisia voittoja ja tappioita, joiden suuruus määräytyy päätöksentekijän kannalta ulkokohtaisista tekijöistä toisin kuin tutkimuksessa tarkasteltujen vakuutus sien tapauksessa.

Lähdeviitteet:

Elliot, C. ja Vaughan, E.J. (1972): Fundamentals of Risk and Insurance, Stanford.

Hanoch, G. ja Levy, H. (1969): "Efficiency analysis of choices involving risk", The Review of Economic Studies, Vol. XXXVI (3) No. 107, July, 335-345.

Kosonen, J. (1977): "Riskien siirtäminen ja vakuutustoiminta", Elinkeinoelämän Tutkimuslaitos, Sarja B 16, Helsinki.

Laurila, Pentti J. (1977): Riskit ja niiden vakuuttaminen, Mänttä.

Luce, R.D. ja Raiffa, H. (1957): "Games and decisions", John Wiley & Sons., Inc. USA.

von Neuman, J. ja Morgenstern, O. (1947): "Theory of games and economic behaviour", second edition, Princeton University Press, Princeton.

Rudin, W. (1964): "Principles of mathematical analysis", Kogakusha Company Ltd., Tokyo.

Tesfatsion, L. (1976): "Stochastic dominance and maximization of expected utility", Review of Economic Studies, 2, 301-315.

Törnqvist, L. ja Nordberg, L. (1968): "Päätätieteen keskeisiä ongelmia", WSOY, Porvoo, Helsinki.

Vartia, Y.O. (1973): "Betajakauman parametrien estimointi maximum likelihood-menetelmällä", Elinkeinoelämän Tutkimuslaitoksen julkaisuja A1, Helsinki.

Vasama, P-M. ja Vartia, Y.O. (1972): "Johdatus tilastotieteen, osa I", II korjattu painos, Gaudeamus, Helsinki.

Liite: Teoreema stokastisten päätösvaihtoehtojen arvostamisesta

Lause: Olkoon F_1 ja F_2 kahteen päätösvaihtoehtoon a_1 ja a_2 liittyvien utiliteettien kertymäfunktiot, ts. $F_1(u) = P(\underline{u} < \underline{u} \mid a_1)$ ja $F_2(u) = P(\underline{u} < \underline{u} \mid a_2)$. Jos kertymäfunktio F_1 on kokonaan kertymäfunktion F_2 vasemmalla puolella eli $F_1(x) \geq F_2(x)$ kaikilla $x \in \mathbb{R}$, (ts. ehdollinen utiliteetti $(\underline{u} \mid a_1)$ on $(\underline{u} \mid a_2)$:ta stokastisesti pienempi) niin kaikilla jatkuvilla, rajoitetuilla ja ei-vähenevillä funktioilla $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ pätee

$$(1) \quad E h(\underline{u} \mid a_1) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) dF_1(x) \leq \int_{-\infty}^{\infty} h(x) dF_2(x) = E h(\underline{u} \mid a_2)$$

Ja kääntäen: Jos ehto (1) on voimassa kaikille jatkuville, rajoitetuille ja ei-väheneville funktioille $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ niin $F_1(x) \geq F_2(x)$ kaikilla x :n arvoilla.

Todistus: Stieltjes-integraaleille pätee

$$\int_{-\infty}^{\infty} h(x) dF_1(x) - \int_{-\infty}^{\infty} h(x) dF_2(x) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) d(F_1 - F_2)(x)$$

Koska h on jatkuva ja $(F_1 - F_2)$:n variaatio on kahden kertymäfunktion erotuksena rajoitettu, voidaan suorittaa osittais-integrointi, ks. Rudin (1964, s. 122):

$$(2) \quad \int_a^b h d(F_1 - F_2) = \int_a^b h(F_1 - F_2) - \int_a^b (F_1 - F_2) dh.$$

Kun $a \rightarrow -\infty$ ja $b \rightarrow +\infty$, lähestyy ensimmäinen termi nollaa (ainakin kun h on rajoitettu) ja koko lausekkeen raja-arvo on siis $-\int_{-\infty}^{\infty} (F_1 - F_2) dh$. Tämä on ei-positiivinen, koska $F_1(x) - F_2(x) \geq 0$ ja h oli ei-vähenevä. Siis $\int_{-\infty}^{\infty} h d(F_1 - F_2) \leq 0$, josta (1) seuraa.

Alkuosa lauseesta on todistettu. Olkoon kääntäen (1) voimassa kaikille jatkuville, rajoitetuille ja ei-väheneville funktioille h . Aivan kuten edellä saadaan

$$\int_{-\infty}^{\infty} h d(F_1 - F_2) = - \int_{-\infty}^{\infty} (F_1 - F_2) dh \leq 0.$$

Olkoon nyt $a \leq b$ ja $h(x) = \begin{cases} 0, & \text{kun } x \leq a \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{kun } a < x \leq b \\ 1, & \text{kun } b < x. \end{cases}$

Tällöin saadaan

$$(3) \quad - \int_a^b \left(\frac{F_1(x) - F_2(x)}{b-a} \right) dx \leq 0 \quad \text{ja}$$

$$(4) \quad \int_a^b (F_1(x) - F_2(x)) dx \leq 0$$

kaikilla luvuilla a ja b , joille $a \leq b$. Jos $F_1(x) < F_2(x)$ jollakin x -arvolla x_0 , pätee $F_2(x) - F_1(x) > \frac{1}{2}(F_2(x_0) - F_1(x_0)) > 0$ jollakin välillä $[x_0, x_0 + \epsilon]$, koska F_1 ja F_2 ovat kertymäfunktioina ei-väheneviä ja oikealle jatkuvia. Jatkuvia niiden ei tarvitse olla. Majorointiperiaatteen mukaan tällöin

$$(5) \quad \int_{x_0}^{x_0 + \epsilon} (F_2(x) - F_1(x)) dx > \frac{\epsilon}{2} (F_2(x_0) - F_1(x_0)) > 0,$$

mikä on (4):n kanssa ristiriidassa. Siis $F_1(x) \geq F_2(x)$ kaikilla x :n arvoilla. Myös lauseen loppuosa on todistettu. $\square$

Huomautus: Lause on oleellisesti esitetty julkaisussa Vartia (1973, s. 47), tosin ilman loppuosan todistusta. Hyvin samantapaisten minulle aiemmin tuntemattoman formuloinnin peruslauseesta esittävät Hanoch ja Levy (1969) 1. teoreemassaan. Heidän artikkelinsa täydentää tekstissä esitettyjä pohdintoja. Kuitenkin heidän todistuksensa on virheellinen. Funktiosta h on oletettava muutakin kuin Hanochin ja Levyn lemmassaan 1 oletama ei-vähenevyys. Edellä on teoreema todistettu, kun h on lisäksi jatkuva ja rajoitettu. Molempia vaatimuksia voidaan toki lieventää.

Toisen, esittämästäni hieman poikkeavan riippumattoman todistuksen on esittänyt Tesfatsion (1976). Tesfatsion tarkastelee kahta mielivaltaista kertymäfunktiota F_1 ja F_2 $\mathbb{R}$:ltä $\mathbb{R}$:lle ja käyttää merkintöjä: $U^* = \{h \mid h \text{ on ei-vähenevä ja jatkuva funktio } \mathbb{R}: \text{ltä } \mathbb{R}: \text{lle}\}$, $U^*(F_1, F_2) = \{h \in U^* \mid \int_{\mathbb{R}} h dF_1 - \int_{\mathbb{R}} h dF_2 \text{ on määritelty sekä äärellinen tai } \pm \infty\}$.

$[F_1 DF_2 \text{ wrt } U]$ tarkoittaa, että $\int h dF_1 - \int h dF_2 \geq 0$ kaikilla $h \in U$ s.e. yhtäsuuruus pätee jollakin h :lla ja $[F_1 < F_2] \iff [\forall x \in \mathbb{R} : F_1(x) \leq F_2(x) \ \& \ \exists x \in \mathbb{R} : F_1(x) < F_2(x)]$. $[F_1 DF_2 \text{ wrt } U]$ luetaan " F_1 dominates (stochastically) F_2 with respect to U ", sillä mielivaltaisen U :n funktion h odotusarvo on F_1 -jakauman tapauksessa vähintään sama kuin F_2 -jakaumalla. Tesfatsion todistama teoreema 1 on seuraava:

$$[F_1 DF_2 \text{ wrt } U^*(F_1, F_2)] \quad \text{jos ja vain jos} \quad [F_1 < F_2].$$