

Keskusteluaiheita Discussion papers

Yrjö O. Vartia*

LAATUEROJEN VAIKUTUKSISTA

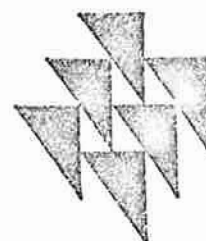
INDEKSILASKELMISSA

No 56

29.6.1980

* Helsingin yliopisto,
Tilastotieteen laitos

This series consists of papers with limited circulation, intended to stimulate discussion. The papers must not be referred or quoted without the authors' permission.



Laatuerojen vaikutuksista indeksilaskelmissa

1. Johdanto

Ansiotasoindeksissä ja yleisemmin palkkatilastoissa käytetyn keskituntipalkan heikkouksien selvittämiseksi tarkastellaan aluksi neutraalimpaa aihetta, värimetallien keskihinnan laskemista. On helpompi johtaa ja tulkita saatavat matemaattiset tulokset ensin konkreettisemmän kilohinnan tapauksessa, jonka jälkeen tuloksia voidaan soveltaa myös esim. tuntipalkoille. Tarkasteltavana on yleisemmin laatuerojen ongelma indeksilaskelmissa, ks. Vartia (1976) s. 65-66 ja 95.

2. Keskimääräisen kilohinnan suhteellinen muutos ja asialliset hintaindeksilaskelmat

Olkoon a_i tietty värimetalli, v_i sen tuontiarvo, q_i sen tuonti kiloissa ja $p_i = v_i/q_i$ tuonnin kilohinta. Kukin värimetalli a_i , $i = 1, \dots, n$, on tuotteena homogeenista, mikä ilmenee esim. kuparin tapauksessa kuparikilon hinnan vähäisenä vaihteluna tietyllä ajankohdalla: kilo kuin kilo on likimain saman hintaista.

Värimetallien $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ keskimääräiset kilohinnat
 periodeilla t^1 ja t^0 ovat

$$(1) \quad \bar{p}^1 = \Sigma v_i^1 / \Sigma q_i^1$$

$$(2) \quad \bar{p}^0 = \Sigma v_i^0 / \Sigma q_i^0.$$

Näiden suhde

$$(3) \quad \begin{aligned} \bar{p}^1 / \bar{p}^0 &= \frac{\Sigma v_i^1 / \Sigma q_i^1}{\Sigma v_i^0 / \Sigma q_i^0} \\ &= \frac{\Sigma v_i^1 / \Sigma v_i^0}{\Sigma q_i^1 / \Sigma q_i^0} = \frac{V^1 / V^0}{\Sigma q_i^1 / \Sigma q_i^0} \end{aligned}$$

kertoo keskimääräisen kilohinnan suhteellisen muutoksen
 periodilta t^0 periodille t^1 . Kilohinnan suhteellinen muutos-
 han on $(\bar{p}^1 / \bar{p}^0) - 1$ eli $100(\bar{p}^1 - \bar{p}^0) / \bar{p}^0$ prosenttia.

Suhde (3) voidaan laskea paitsi keskihintojen $\bar{p}^1$ ja $\bar{p}^0$ suh-
 teena myös jakamalla värimetallien kokonaistuontien arvo-
 suhde V^1 / V^0 tuonnin kilomäärien suhteella

$$(4) \quad \Sigma q_i^1 / \Sigma q_i^0.$$

Ei ole aivan yksinkertaista suoraan nähdä, että (3) tuottaa
 yleensä harhaisia tuloksia asiallisella tavalla tehtyihin
 hintaindeksilaskelmiin verrattuna, mutta se on harhainen
 paitsi jos

(a) tuontimäärät kiloissa ovat muuttuneet samassa suhteessa
(eli $q_i^1 = m q_i^0$ kaikilla i :n arvoilla) tai .

(b) värimetallien tuontimäärien suhteelliset muutokset ja
perusvuoden hinnat eivät korreloi keskenään.

Tämän osoittamiseksi verrataan (3):a Paaschen hintaindeksiin

$$(5) \quad P_0^1(Pa) = \frac{\sum p_i^1 q_i^1}{\sum p_i^0 q_i^1} = \frac{\sum p_i^1 q_i^1 / \sum p_i^0 q_i^0}{\sum p_i^0 q_i^1 / \sum p_i^0 q_i^0} = \frac{V^1/V^0}{Q_0^1(La)}$$

Näiden suhde on

$$(6) \quad R_0^1 = \frac{\bar{p}^1/\bar{p}^0}{P_0^1(Pa)}$$

$$= \left(\frac{V^1/V^0}{\sum q_i^1 / \sum q_i^0} \right) \left(\frac{Q_0^1(La)}{V^1/V^0} \right)$$

$$= \frac{\sum p_i^0 q_i^1 / \sum p_i^0 q_i^0}{\sum q_i^1 / \sum q_i^0} ,$$

joka siis on sama kuin Laspeyresin volyyymi-indeksiin

$$(7) \quad Q_0^1(La) = \frac{\sum p_i^0 q_i^1}{\sum p_i^0 q_i^0} = \sum w_i^0 (q_i^1/q_i^0)$$

ja kilomäärien suhteen

$$(8) \quad \frac{\sum q_i^1}{\sum q_i^0} = \frac{\sum q_i^0 (q_i^1/q_i^0)}{\sum q_i^0} = \sum c_i^0 (q_i^1/q_i^0)$$

osamäärä. Yhtälössä (8) $c_i^0 = q_i^0 / \sum q_j^1 = a_i$:n tuontimäärän kilo-osuus koko tuonnista. Siis sijoittamalla (7) ja (8) yhtälöön (6) ja ottamalla logaritmi saadaan

$$(9) \quad \log R_0^1 = \log \frac{\sum w_i^0 (q_i^1 / q_i^0)}{\sum c_i^0 (q_i^1 / q_i^0)}.$$

Aritmeettisten ja geometrinen keskiarvojen logaritmin välillä pätee seuraava arvio, ks. Vartia (1978):

$$(10) \quad \log \sum c_i (q_i^1 / q_i^0) \approx \sum c_i \log (q_i^1 / q_i^0) + \frac{1}{2} s_q^2(c),$$

jossa c_i :t ovat mielivaltaiset painot, joiden summa on yksi ja

$$(11) \quad s_q^2(c) = \sum c_i [\log(q_i^1 / q_i^0) - \sum c_i \log(q_i^1 / q_i^0)]^2$$

on c -painoilla laskettu volyymisuhteiden logaritmien (eli volyymin log-muutosten) varianssi. Näin ollen

$$\begin{aligned} (12) \quad \log R_0^1 &= \log \sum w_i^0 (q_i^1 / q_i^0) - \log \sum c_i^0 (q_i^1 / q_i^0) \\ &\approx \sum w_i^0 \log (q_i^1 / q_i^0) + \frac{1}{2} s_q^2(w^0) \\ &\quad - \sum c_i^0 \log (q_i^1 / q_i^0) - \frac{1}{2} s_q^2(c^0) \\ &= \sum (w_i^0 - c_i^0) \log (q_i^1 / q_i^0) + \frac{1}{2} (s_q^2(w^0) - s_q^2(c^0)) \end{aligned}$$

Koska volyymisuhteiden logaritmien varianssit $s_q^2(w)$ ja $s_q^2(c)$ ovat joka tapauksessa likimain yhtä suuria, pätee edelleen

$$(13) \quad \log R_0^1 \approx \sum (w_i^0 - c_i^0) \log (q_i^1/q_i^0).$$

Jos volyymisuhteet ovat kaikille tuotteille samat, $q_i^1/q_i^0 = m$ eli $q_i^1 = m \cdot q_i^0$, niin $s_q^2(w^0) = s_q^2(c^0) = 0$ ja edelleen

$$\begin{aligned} (14) \quad \log R_0^1 &= \sum (w_i^0 - c_i^0) \log m \\ &= \log m (\sum w_i^0 - \sum c_i^0) \\ &= \log m (1 - 1) = 0 \end{aligned}$$

ja siis $R_0^1 = 1$ eli $\bar{p}_i^0/\bar{p}_i^1 = P_0^1(\text{Pa})$ riippumatta hintasuhteiden p_i^1/p_i^0 arvoista. Sama pätee hyvin tarkasti jos $q^1 \approx m q^0$, joten (3) on käyttökelpoinen värimetallien hintaindeksi, jos tuontimäärät kiloissa mitaten muuttuvat eri metalleilla samassa suhteessa eli "tuonnin kilorakenne ei muutu". Arvoissa ilmaistu rakenne saa sitävastoin muuttua vapaasti ehdolla, että kilorakenne säilyy perusperiodin mukaisena.

Sijoittamalla logaritmisin keskiarvon määritelmästä¹⁾

$$(15) \quad L(w_i^0, c_i^0) = \frac{w_i^0 - c_i^0}{\log (w_i^0/c_i^0)}$$

1) Olkoon x ja y positiivisia lukuja. $L(x, y) = (x-y)/\log(x/y)$, kun $x \neq y$ ja $L(x, y) = x$, kun $x = y$, ks. Vartia (1976, s. 11). Lau (1979) käyttää $L(x, y)$:lle symbolia $V(x, y)$ ja nimeä Vartian keskiarvo.

ratkaistu $w_i^0 - c_i^0$ yhtälöön (13), saadaan

$$\begin{aligned}
 (16) \quad \log R_0^1 &\approx \sum L(w_i^0, c_i^0) \log (w_i^0/c_i^0) \log (q_i^1/q_i^0) \\
 &\approx \sum c_i \log \left(\frac{p_i^0 q_i^0 / V^0}{q_i^0 / \sum q_i^0} \right) \log (q_i^1/q_i^0) \\
 &= \sum c_i \log (p_i^0 / \bar{p}^0) \log (q_i^1/q_i^0),
 \end{aligned}$$

jossa painojen $c_i = L(w_i^0, c_i^0) / \sum_j L(w_j^0, c_j^0) \approx L(w_i^0, c_i^0)$ summa on yksi. Koska edelleen

$$\begin{aligned}
 (17) \quad \sum c_i \log (p_i^0 / \bar{p}^0) \\
 &= \frac{1}{\sum_j L(w_j^0, c_j^0)} \sum L(w_i^0, c_i^0) \log \left(\frac{w_i^0}{c_i^0} \right) \\
 &= \frac{1}{\sum L(,)} \sum (w_i^0 - c_i^0) \\
 &= \frac{1}{\sum L(,)} (1 - 1) = 0
 \end{aligned}$$

pätee kovarianssin tunnetun esityksen mukaan

$$\begin{aligned}
 (18) \quad \log R_0^1 &\approx \sum c_i \log (p_i^0/\bar{p}^0) \log (q_i^1/q_i^0) - \\
 &\quad [\sum c_i \log (p_i^0/\bar{p}^0)] [\sum c_i \log (q_i^1/q_i^0)] \\
 &= \text{cov} (\log (p_i^0/\bar{p}^0), \log (q_i^1/q_i^0)) \\
 &= \text{cov} (\log (p_i^0/\bar{p}^0), \dot{q}_i)
 \end{aligned}$$

jossa $\dot{q}_i = \log (q_i^1/q_i^0)$.

Kovarianssi voidaan myös laskea muodossa

$$(19) \quad \text{cov}(\log(p_i^0/\bar{p}^0), \dot{q}_i) = \sum c_i \log(p_i^0/\bar{p}^0) (\dot{q}_i - \sum c_i \dot{q}_i)$$

tai se voidaan yksinkertaistaa muotoon

$$(20) \quad \text{cov}(\log p_i^0, \dot{q}_i) = \sum c_i \log(p_i^0) (\dot{q}_i - \sum c_i \dot{q}_i).$$

Tästä nähdään, että

$$(21) \quad \log R_0^1 \approx \text{cov}(\log p_i^0, \dot{q}_i)$$

eli kilohintasuhteen $\bar{p}^1/\bar{p}^0$ ja Paaschen hintaindeksin suhteellinen ero $\log R_0^1$ on perusvuoden logaritmistien kilohintojen $\log p_i^0$ ja suhteellisten kilomäärien muutosten $\dot{q}_i = \log (q_i^1/q_i^0)$ kovarianssin suuruinen. Jos esim. perusvuonna keskimääräistä kalliimpien värimetallien määrät kasvavat keskimääräistä nopeammin antaa kilohintasuhte $\bar{p}^1/\bar{p}^0$ ylöspäin harhaisen tuloksen. Tämä pätee siitä riippumatta ovatko värimetallien hinnat nousussa, $P_0^1(Pa) > 1$, vai laskussa, $P_0^1(Pa) < 1$.

Pelkästään yhtälöstä (21) voidaan myös päätellä, että $\bar{p}^1/\bar{p}^0$ antaa likimain harhattoman tuloksen vain em. tapauksissa (a) ja (b). Nimittäin a-tapauksessa kilomäärät muuttuivat likimain samassa suhteessa, joten $\dot{q}_i = \log(q_i^1/q_i^0) \approx \log m$ ja $\text{cov}(\log p_i^0, \dot{q}_i) \approx \text{cov}(\log p_i^0, \log m) = 0$, koska vakio $\log m$ ei korreloi perusvuoden hintojen $\log p_i^0$ kanssa.

Jälkimmäisessä b-tapauksessa määrien suhteellisten muutosten $\dot{q}_i = \log(q_i^1/q_i^0)$ ja perusvuoden hintojen $\log p_i^0$ korrelaatio $r(\log p_i^0, \dot{q}_i)$ on nolla, joka sattuu täsmälleen silloin kun vastaava kovarianssi $\text{cov}(\log p_i^0, \dot{q}_i)$ on nolla.

3. Johtopäätöksiä

On syytä todeta, että (21) voi poiketa huomattavastikin nol-
lasta ja siis $\bar{p}^1/\bar{p}^0$ olla pahasti harhainen, vaikka kaikki hin-
nat ovat muuttuneet samassa suhteessa (eli $p^1 = kp^0$) ja jopa vaikk-
ka hinnat ovat pysyneet kaikki muuttumattomina (eli $p^1 = p^0$). Nämä
ehdot eivät nimittäin mitenkään estä esim. perusvuonna kal-
liimpien hyödykkeiden (esim. jalometallien) määriä kasvamasta
keskimääräistä nopeammin, jolloin $\bar{p}^1/\bar{p}^0$ antaa yliampuvia tulok-
sia ($\bar{p}^1/\bar{p}^0 > k$ tai $\bar{p}^1/\bar{p}^0 > 1$).

Ainoa turvallinen tilanne, jossa $\bar{p}^1/\bar{p}^0 = P_0^1(P_a)$ ja $R_0^1 = 1$
välttämättä riippumatta määräkehityksestä, on tapaus, jossa
hyödykkeiden (edellä värimetallien) $a_1, \dots, a_n$ hinnat perus-
vuonna ovat samat eli $p_1^0 = p_2^0 = \dots = p_n^0 = \lambda$ (vakio). Tällöin
 $\text{cov}(\log p_i^0, \dot{q}_i) = \text{cov}(\log \lambda, \dot{q}_i) = 0$ ja $\log R_0^1 = 0$. Voimme myös
päätellä suoraan yhtälöstä (6), että tällöin

$$\begin{aligned}
 (22) \quad R_0^1 &= \frac{\sum p_i^0 q_i^1 / \sum p_i^0 q_i^0}{\sum q_i^1 / \sum q_i^0} \\
 &= \frac{\lambda \sum q_i^1 / \lambda \sum q_i^0}{\sum q_i^1 / q_i^0} = 1.
 \end{aligned}$$

Mutta tällöinhän eri hyödykkeet $a_1, \dots, a_n$ ovat hinnaltaan täysin homogeenisia, mikä yleensä on voimassa ainoastaan kun hyödykkeet ovat myös yleisiltä ominaisuuksiltaan samanlaatuisia. Keskimääräisen kilohinnan (tai yhtä hyvin litrahinnan, kappalehinnan, jne.) laskeminen on luonnollisesti ilman mitään matemaattisia todistelujakin mielekästä samanlaatuisille (homogeenisille) tuotteille.

Tätä emme ole edellä asettaneet missään vaiheessa kyseenalaiseksi tai katsoneet tarpeelliseksi todistaa. Sen sijaan olemme osoittaneet huomattavasti vahvemman tuloksen, joka on heterogeenisten tuotteiden kilohintoihin perustuvien indeksilaskelmien kannalta perustavan tärkeä: Tarkasteltavan tuoteryhmän keskimääräisen kilohinnan vaihteluun perustuva tuoteryhmän hintaindeksi on useissa tilanteissa pahasti harhainen sellaiselle tuoteryhmälle, jonka tuotteiden kilohinnat poikkeavat perusvuonna toisistaan.

Perusvuoden hintojen hyödykkeittäinen vaihtelu on siis riittävä osoitus tuotteiden epähomogeenisuudesta, jolloin niitä ei voida käsitellä yhtenäisenä ryhmänä. Epähomogeenisen ryhmän indeksilaskelmien tulee perustua yksityiskohtaisempaan hyödykeryhmittä-

lyyn, jossa homogeenisuusvaatimus on paremmin voimassa. Tätä ovat indeksien laatijat yleensä pitäneet itsestään selvänä.

Vastaavaa ongelmaa ansiotasoindeksin yhteydessä olen tarkastellut julkaisussa Vartia (1979). Ansiotasoindeksilaskelmiin sovellettuna voimme todeta seuraavaa. Esimerkiksi tietyn teollisuustyöntekijöiden ryhmän keskituntiansioihin (1) ja (2) perustuva keskituntipalkkaaindeksi (3) tuottaisi useissa tilanteissa korrektisti laskettuun ansiotasoindeksiin (5) nähden selvästi harhaisia tuloksia, koska teollisuustyöntekijöiden tuntipalkat vaihtelevat perusvuonna systemaattisesti työnimikkeestä toiseen. Tämän harhan suuruuden ja etumerkin määrää kussakin tilanteessa perusvuoden työnimikkeittäisten tuntipalkkojen ja tehtyjen työtuntien suhteellisten muutosten välinen kovarianssi (20). Kovarianssin suuruus ilmeisesti riippuu suhdannetilanteesta, mutta työvoiman pitkän aikavälin rakenteellisen muuttumisen vuoksi tämä kovarianssi olisi ilmeisesti pääsääntöisesti positiivinen. Samalla olisi myös nykyisen ansiotasoindeksin harha keskimäärin positiivinen. Ansiotasoindeksin ns. pikauudistuksessa ko. rakenteellisista tekijöistä johdettava mahdollista harhaa on pikemminkin lisätty kuin vähennetty.

Nykyisen ansiotasoindeksin mahdollinen harha voitaisiin arvioida melko luotettavasti jo STK:n julkaisemien teollisuustyöntekijöiden ja toimihenkilöiden palkkatilastojen perusteella.

Lähdeviitteet:

LAU, L.J. (1979): "On exact index numbers", Review of Economics and Statistics, LXI, 73-81.

VARTIA, Yrjö O. (1976): "Relative changes and index numbers", The Research Institute of the Finnish Economy, Serie A4, Helsinki.

VARTIA, Yrjö O. (1978): "Fishers's five-tined fork and other quantum theories of index numbers", in Theory and applications of economic indices, ed. by W. Eichhorn, R. Henn, G. Opitz, R.W. Shephard, Physica-Verlag, Würzburg.

VARTIA, Yrjö O. (1979): "Ansiotasoindeksin "uudistamisesta": Alustus ja muistio työn hinnan sekä työpanoksen muutosten mittaamisesta", Keskusteluaiheita No. 28, Elinkeinoelämän Tutkimuslaitos, Helsinki.