ETLA
ELINKEINOELÄMÄN TUTKIMUSLAITOS
THE RESEARCH INSTITUTE OF THE FINNISH ECONOMY
Lönnrotinkatu 4 B, 00120 Helsinki 12, Finland, tel. 601322

Keskusteluaiheita
Discussion papers

Hannu Törmä* - Marko Mäkelä** -
Pekka Neittaanmäki***

YLEISEN TASAPAINON VEROMALLIT JA OPTIMOINNIN ASIANTUNTIJAJÄRJESTELMÄ EMP

No 247 28.10.1987

* Lehtori, Jyväskylän yliopisto
Taloustieteen laitos

** Tutkimusassistentti, Suomen Akatemia
Jyväskylän yliopisto, Matematiikan laitos

*** Apulaisprofessori, Jyväskylän yliopisto
Matematiikan laitos

ISSN 0781-6847

TÖRMÄ, Hannu - MÄKELÄ, Marko - NEITTAANMÄKI, Pekka, YLEISEN TASAPAINON VEROMALLIT JA OPTIMOINNIN ASIANTUNTIJAJÄRJESTELMÄ EMP. Helsinki : ETLA, Elinkeinoelämän Tutkimuslaitos, The Research Institute of the Finnish Economy, 1987. 33 s. (Keskusteluaiheita, Discussion Papers, ISSN 0781-6847 ; 247).

TIIVISTELMÄ: Työpaperissa tarkastellaan yleisen tasapainon mallien numeerisia ratkaisumahdollisuuksia ja kartoitetaan yleiskäyttöisen optimoinnin asiantuntijajärjestelmän EMP:n soveltuvuutta ratkaisuympäristönä. Tätä asiantuntijajärjestelmää verrataan kahteen erityisesti tasapainomalleille kehitettyyn spesiaaliohjelmistoon, GEMODEL:iin ja MPSGE:hen, jotka perustuvat Merrilin ja Mathiesenin ratkaisualgoritmeihin.

Tutkimus liittyy laajempaan ETLA:n tutkimushankkeeseen, jossa on tarkoituksena tutkia mahdollisuuksia rakentaa suhteellisen laaja Suomen kansantalouden yleisen tasapainon veromalli. Mallia on tarkoitus soveltaa panos-. kulutus- ja tuloverotuksen muutosehdotusten vaikutusanalyysissä.

Matemaattista mallittamista käsittelevän yleisluonteisen johdannon jälkeen työn toisessa luvussa käsitellään tasapainomalleja, jotka voidaan kuvata epälineaarisina yhtälöryhminä. Kolmannessa ja neljännessä luvussa esitellään erityyppisiä ohjelmistoja ja algoritmeja ko. yhtälösysteemin ratkaisemiseksi. Viidennessä luvussa tarkastellaan esimerkkinä käytettävää kahden toimialan ja kahden tuotantopanoksen sekä kahden kuluttajan yleisen tasapainon mallia ja sen ratkaisemista GEMODEL- JA MPSGE-ohjelmistoilla. Kuudennessa luvussa raportoidaan ohjelmoinnin asiantuntijajärjestelmän EMP:n soveltuvuus tämän esimerkkimallin ratkaisemiseen. Viimeisessä luvussa tehdään johtopäätökset ja pohditaan EMP-ohjelmiston hyödyntämistä ratkaisuympäristönä. Liitteissä 1-6 on lyhyesti kuvattu algoritmit, joihin käytetyt ohjelmistot perustuvat ja esitetty käytettyjen ohjelmistojen keskeiset syöttötiedot.

AVAINSANAT: Yleinen tasapaino, simulointi, verotus, optimointi, epälineaarinen systeemi, asiantuntijajärjestelmät

SISÄLTÖ

1. Johdanto 1

2. Tasapainomalleista 3

3. Epälineaarisen (tasapaino-)yhtälöryhmän ratkaisuohjelmistoista 5
- **3.1. Tasapainomalli ja sen ratkaisumetodit** 5
- **3.2. Yleisen aliohjelmakirjaston käyttö** 6
- **3.3. Spesiaaliohjelmistot** 7
- **3.4. NE:n palauttaminen epälineaariseksi optimointitehtäväksi** 8

4. Optimoinnin asiantuntijajärjestelmät 10
- **4.1. Yleistä asiantuntijajärjestelmistä** 10
- **4.2. Optimoinnin asiantuntijajärjestelmä EMP** 12

5. Eräs tasapainomalli ja sen numeerinen ratkaiseminen 14

6. Esimerkkimallin käsittely EMP:llä 20

7. Johtopäätökset 24

Lähdeluettelo 25

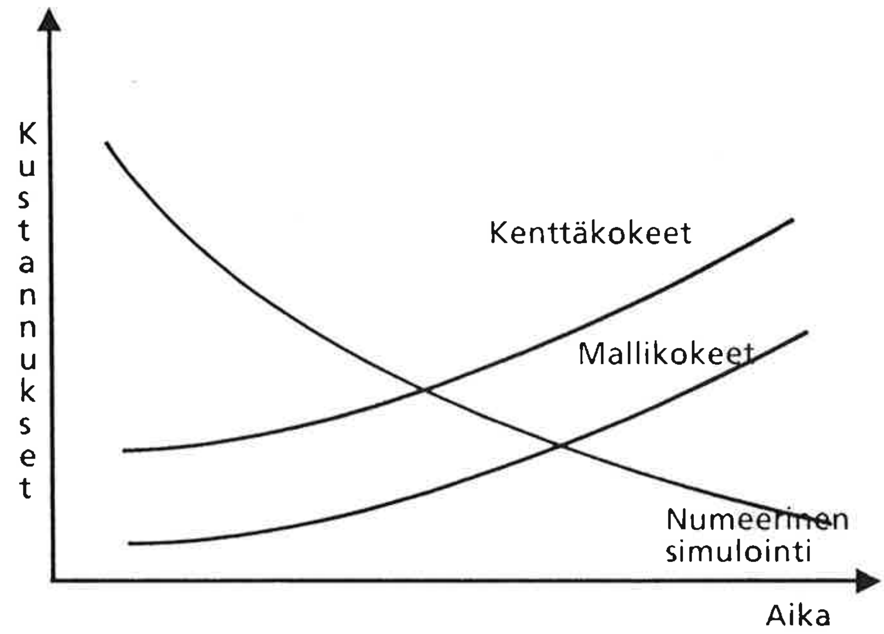
Liitteet 1-6 26

1. Johdanto

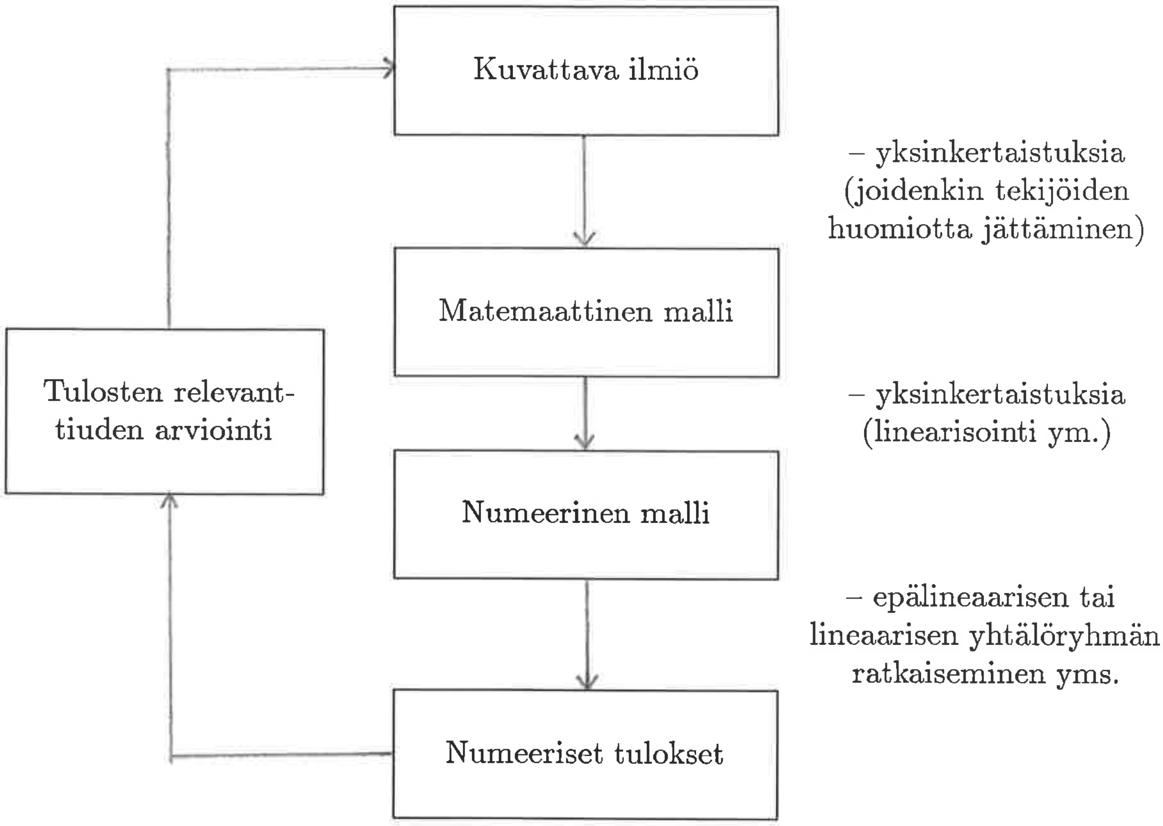
Reaalimaailman ilmiöiden simulointi tulee yhä tärkeämmäksi apuvälineeksi tekniikan ja talouden suunnittelu- ja koulutustehtävissä. Simuloinnilla (jäljittelyllä) tarkoitetaan yleisesti ilmiöiden, tapahtumien tai näistä muodostuvien prosessien ja järjestelmien toiminnan kuvaamista ja tutkimista matemaattisten suureiden ja mallien avulla. Reaalimaailman ilmiöiden kuvaaminen edellyttää usein ilmiöiden aikariippuvuuden huomioonottamista, mutta monesti simuloitavan kohteen oletetaan olevan jatkuvassa tasapainotilassa, jolloin aikariippuvuus voidaan eliminoida tarkasteluista. Simulointisuureet voivat olla jatkuvia tai sellaisena voivat olla erilliset tapahtumat. Tietokonesimulointi on useilla aloilla jo vakiintunut menetelmä analysoida ilmiöitä parhaimman suunnittelutuloksen aikaansaamiseksi.

Numeeristen simulointimallien käyttö liittyy läheisesti tietokonetekniikan kehitykseen, koska monia numeerisia ratkaisumenetelmiä on voitu tehokkaasti hyödyntää vasta nopeiden tietokoneiden tultua käyttöön. Tietokonetekniikan nopea kehitys on mahdollistanut sekä yhä suurempien ja yksityiskohtaisempien simulointimallien käyttöönoton että simulointimahdollisuuksien kytkemisen kätevästi osaksi laajoja tutkimus-, suunnittelu- ja tuotannonohjaustöitä.

Tietokoneteknologian sekä laskentametodien kehityksen myötä on pienoismallikokeista ja täyden mittakaavan kenttäkokeista voitu useassa tapauksessa luopua ja on voitu siirtyä käyttämään numeerisia simulointimalleja. Useat kirjallisuudessa esiintyvät artikkelit raportoivat tämän siirtymisen mukanaantuomista eduista. Numeeristen simulointimallien käytön reaalikustannus pienenee jatkuvasti (kuva 1).



Kuva 1. Eri koetyyppien kustannusvertailu ajan suhteen.



Kuva 2. Numeerinen simulointi.

Luonnontieteissä ja tekniikassa matemaattisten simulointimallien rakentamisessa ja testauksessa on pitkät perinteet. Numeerisen simuloinnin periaate ilmenee kuvasta 2. Mallit ovat luotettavia, yleisesti kansainvälisesti hyväksyttyjä ja monipuolisesti sovellettuja.

Taloudellisen suunnittelun perustaksi on myös kehitetty matemaattisia malleja. Näille malleille on tyypillistä se, että ne ovat paikalliseen taloudelliseen toimintaan/lakiin perustuen lähes maakohtaisia. Tämä on huomattava rajoite ja puute. Vastaavasti matemaattisen mallin tietokonekäsittelyyn tarkoitetut ohjelmistot eivät näinollen ole yleiskäyttöisiä. Yleiskäyttöisten ohjelmistojen puute on ollut ilmeisenä haittana Suomessa numeeristen simulointimallien käytölle taloudellisessa suunnittelussa. Vaikeutena taloudellisissa malleissa on reaalisten testien teko sekä simuloitavien ilmiöiden monimutkaisuus.

Jotta simulointimallin antamat tulokset olisivat relevantteja, ei matemaattista mallia rakennettaessa saa tehdä liian karkeita yksinkertaistuksia. Tyypillinen virhe on, että turvaudutaan lineaarisiin malleihin, koska tietoa ei ole epälineaaristen mallien numeerisesta käsittelystä eikä yleisesti saatavilla olevista tietokoneohjelmistoista.

Tämän työn tarkoituksena on osoittaa, kuinka yleiskäyttöisiä epälineaarisille malleille kehitettyjä ohjelmistoja (epälineaarinen optimointi, epälineaaristen yhtälöiden ratkaiseminen) voidaan soveltaa talouden yleisen tasapainomallin ratkaisemiseen. Viimeaikainen ohjelmistokehitys ja tukiohjelmistokehitys mahdollistaa tehokkaiden ratkaisualgoritmien joustavan käytön. Käyttäjän ei tarvitse tuntea numeerisen mallin ratkaisutapaa. Tukiohjelmisto huolehtii (FORTRAN-kielisen) ohjelmiston rakentamisesta, ajosta ja ilmoittaa varmuusindeksin numeerisen mallin käsittelyn onnistumisesta.

Tässä työssä edetään kuvan 2 periaatetta noudattaen seuraavasti. Aluksi luvussa 2 tarkastellaan talouden yleistä tasapainomallia. Luvussa 3 esitellään epälineaaristen mallien (yhtälöryhmien) numeeristen ratkaisualgoritmien periaatteita sekä luetellaan yleisimmät tekniikan ja luonnontieteiden alalla kehitetyt valmisohjelmistokirjastot näiden mallien käsittelemiseksi.

Luvussa 4 esitellään optimoinnin asiantuntijajärjestelmä EMP (Expert Mathematical Programming), jolla voidaan joustavasti käsitellä yleisiä epälineaarisia malleja.

Luvussa 5 tarkastellaan esimerkkinä käytettävää kahden toimialan ja kahden kuluttajan yleisen tasapainon mallia ja sen ratkaisemista spesiaaliohjelmistoilla. Luvussa 6 sama esimerkkimalli ratkaistaan EMP-järjestelmällä ja tuloksia verrataan edellisen luvun tuloksiin.

Luvussa 7 tehdään johtopäätökset ja liitteissä 1–6 on esitetty käytetyt algoritmit ja ohjelmistojen keskeiset syöttötiedot.

2. Tasapainomalleista

Yleinen tasapaino on talouden tila, jossa sen kaikki markkinat ovat tasapainossa. Yleisen tasapainon mallin avulla pyritään talouden tasapaino esittämään yksinkertaistaen, mutta kuitenkin niin että talouden tuottajien ja kuluttajien käyttäytyminen on sopusoinnussa keskenään. Yleisen tasapainon mallit perustuvat mikrotalousteoriaan, mutta ne ovat kuitenkin luonteeltaan talouden makroanalyysiä. Näissä malleissa huomioidaan talouden eri sektoreiden väliset tuotannon ja kulutuksen palautemekanismit, joten mallien avulla voidaan tutkia määrätyn häiriön, esim. jollekin toimialalle asetetun veron, yleisen tasapainon vaikutuksia.

Yleisen tasapainon mallien keskeisiä sovellutuskohteita ovat verovaikutusanalyysi ja kansainvälisen kaupan kysymykset. Shoven ja Whalley (1984) käsittelevät näitä sovellutusalueita. Fullerton, Henderson ja Shoven (1984) käsittelevät mallien metodologiaa ja Borgesin (1986) artikkelissa pohditaan mallien yleistä hyödyllisyyttä taloustieteen analyysivälineinä. Yleisen tasapainon mallit muodostavat erään suositun tutkimusalueen, jolta on viime vuosina julkaistu myös kokoomateoksia, kuten Scarf ja Shoven (1984) ja Piggott ja Whalley (1986), joissa tarkastellaan alan viimeaikaista kehitystä. Yleisen tasapainon malli on empiirisissä sovellutuksissa numeerinen ja laskettava, joten se tarjoaa luontevan yhteistyömahdollisuuden taloustieteen ja soveltavan matematiikan tutkijoille. Hyvä esimerkki tästä on julkaisu Manne (1985), jossa tarkastellaan sekä näiden mallien matemaattisia ratkaisumahdollisuuksia että mallien rakentamista yleensä.

Yleisen tasapainon mallien hyödyntäminen ja kehittelytyö on Suomessa vasta alullaan. Helsingin kauppakorkeakoulun kansantaloustieteen laitoksella on kehitetty suppea pienen avoimen talouden oletukseen perustuva malli, jolla on tutkittu pääomatulojen verotusvaihtoehtojen hyvinvointivaikutuksia. Yhteenveto tästä tutkimustyöstä on esitetty julkaisussa Ylä-Liedenpohja (1987). Törmä (1987) on kehittänyt tätä GEMODEL-mallia ja tutkinut sen avulla Suomessa vuoden 1986 lopulla toimeenpannun energian liikevaihtoverouudistuksen hyvinvointivaikutuksia.

Yleisen tasapainon malli kuvaa tiettyjen kuluttajien ja tuottajien käyttäytymisen tasapainoa. Kullakin kuluttajalla on alunperin hallussaan tietty alkuvaranto tuotantopanoksia ja hyödykkeitä. Kuluttajilla on hyödyn maksimoinnin kautta talouden hyödykkeille kysyntäfunktiot. Markkinakysyntä muodostuu kunkin kuluttajan kysyntöjen summana. Hyödykkeiden markkinakysyntä riippuu talouden kaikista hinnoista, kysyntäfunktiot oletetaan hintojen suhteen nollannen asteen homogeenisiksi ja niiden oletetaan täyttävän Walrasin lain, jonka mukaan, millä tahansa hinnoilla, kuluttajan kokonaismenojen täytyy olla yhtäsuuret hänen tulojensa kanssa. Tuotanto kuvataan vakioskaalatuottoisilla tuotantofunktioilla. Tuottajien oletetaan maksimoivan voittojaan. Kysyntäfunktioiden nollannen asteen homogeenisuus yhdessä voittofunktioiden oletetun lineaarisen homogeenisuuden (hintojen suhteen) kanssa aiheuttaa sen, että mallissa ainoastaan suhteellisilla hinnoilla on merkitystä. Numereeksi voidaan valita mikä tahansa talouden hinnoista, usein työn hinta toimii numereena.

Yleisen tasapainon malli voidaan esittää epälineaarisena yhtälöryhmänä. Yleinen tasapaino edellyttää, että kaikkien talouden hyödykkeiden ja tuotantopanosten kysyntöjen on oltava yhtäsuuret niiden tarjonnan kanssa, minkään tuotantotoiminnan ei saa tuottaa tuotantokustannukset ylittävää puhdasta voittoa (voittojen maksimointi yhdessä vakioskaalatuottoisen teknologian kanssa) ja julkisen vallan verotulojen on oltava yhtäsuuret sen maksamien tulonsiirtojen kanssa. Mikäli kyseessä on avoimen talouden malli, niin yleinen tasapaino vaatii edelleen, että maksutase on tasapainossa. Yleisen tasapainon mallin ratkaisuongelma onkin sellaisten tuotantopanosten ja hyödykkeiden hintojen löytäminen, joiden vallitessa nämä tasapainoehdot täyttyvät. Yleisen tasapainon analyysi voidaankin määritellä lähestymistavaksi, jossa pyritään selvittämään määrätyn häiriön, esim. määrätylle toimialalle asetetun veron, vaikutukset talouden kaikkiin hintoihin. Kukin yhtälöryhmän yhtälö kuvaa yhden määritelmä- tai tasapainoidentiteetin. Epälineaarisuus seuraa siitä, että tyypillisesti talouden sektoreiden tuotanto- eli tarjontayhtälöt ja talouden hyödykkeiden kysyntäyhtälöt määritellään parametrien suhteen epälineaarisiksi.

Yleisen tasapainon malli soveltuu veromuutosten yleisen tasapainon- ja hyvinvointivaikutusten laskemiseen. Mallin keskeiset muuttujat, myös hyödykkeiden kysynnöistä johdettu kuluttajien hyvinvointi, voidaan ilmaista talouden hintojen funktioina. Keskeistä verovaikutusanalyysissä onkin löytää veromuutosta edeltävät ja sen jälkeiset tasapainohinnat. Veromuutos tulkitaan yhteiskunnan kannalta myönteiseksi jos kuluttajien painotettu hyvinvointi kasvaa ja kielteiseksi jos hyvinvointi laskee. Kuluttajan hyvinvoinnin muutosten mittareina käytetään yleensä Hicksin kompensaatiomittoja.

3. Epälineaarisen (tasapaino-)yhtälöryhmän ratkaisuohjelmistoista

3.1 Tasapainomalli ja sen ratkaisumetodit.

Oletetaan, että yleisen tasapainon mallista saatava epälineaarinen yhtälöryhmä on muotoa:

$$F(x) = 0$$

eli komponenteittain kirjoitettuna tehtävä (NE) (Nonlinear Equations):

$$\text{(NE)} \qquad \begin{cases} F_1(x_1, \cdots, x_n) = 0 \\ \quad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ F_n(x_1, \cdots, x_n) = 0 \end{cases}$$

missä funktiot $F_j : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ ja pisteet $x_i \in \mathbf{R}$ kaikilla $i, j = 1, \ldots, n$.

Yleisen tasapainon mallin numeerisessa ratkaisemisessa on perinteisesti kaksi erilaista lähestymistapaa. Ensimmäinen tapa on käsitellä mallia yleisenä epälineaarisena yhtälöryhmänä ja käyttää ratkaisuun jotain matemaattisen aliohjelmakirjaston epälineaarisen yhtälöryhmän tai epälineaarisen optimoinnin ratkaisurutiinia. Menetelmän suurin etu on sen dynaamisuus ja joustavuus; mallia voidaan modifioida vapaasti, jolloin riittää tehdä vain tarvittavat muutokset yhtälöryhmään ja ratkaista tehtävä uudelleen samalla aliohjelmalla. Haittapuolena on kuitenkin korkea käyttökynnys. Aliohjelmakirjastojen käyttö edellyttää suurta asiantuntemusta ohjelmointitekniikassa sekä oikeiden matemaattisten algoritmien valinnassa. Käyttäjän on määriteltävä pitkiä ja hankalia parametrilistoja, mikä hidastaa itse ratkaisuprosessia sekä lisää virhemahdollisuutta.

Toinen ja taloustieteen tutkijoiden yleisemmin käyttämä strategia on ottaa huomioon mallin erikoispiirteet ja ratkaista tehtävä (mikäli mahdollista) nimenomaan tätä mallia varten rakennetulla spesiaaliohjelmistolla. Tämän menetelmän etuna on ohjelmistojen käyttäjäystävällisyys. Ohjelmistot on yleensä rakennettu siten, että ne kysyvät käyttäjältä vain tarvittavan informaation ja huolehtivat itse ratkaisusta ja tulosten analysoinnista. Spesiaaliohjelmistojen huonona puolena on niiden jäykkyys, sillä ne eivät salli kuin pieniä muutoksia mallin rakenteeseen. Tämä saattaa tutkimuksen kannalta olla monesti rajoittava tekijä.

Edellä olevan pohjalta herää kysymys olisiko mahdollista yhdistää näiden kahden lähestymistavan hyvät puolet, toisin sanoen luoda dynaaminen, mutta toisaalta käyttäjäystävällinen ratkaisusysteemi. Eräs ratkaisu tähän on soveltaa epälineaarisen optimoinnin asiantuntijajärjestelmiä. Ne yleensä sisältävät erikoistapauksenaan yleisen epälineaarisen yhtälöryhmän ratkaisun ja ne on toisaalta rakennettu niin helppokäyttöisiksi, ettei käyttäjältä vaadita kuin perustiedot ohjelmoinnista sekä ongelman matemaattisesta struktuurista. Tässä yhteydessä paneudumme tarkemmin EMP-systeemiin.

3.2 Yleisen aliohjelmakirjaston käyttö.

Yleisen epälineaarisen yhtälöryhmän (NE) ratkaisemisessa on kaksi erilaista lähestymistapaa:

1. Ratkaistaan tehtävä pienimmän neliösumman mielessä, jolloin saadaan rajoittamaton epälineaarinen optimointitehtävä:

$$\text{Minimoi} \quad h(x) = \sum_{j=1}^{n} (F_j(x))^2, \qquad \text{kun } x \in \mathbf{R}^n.$$

2. Käytetään ns. suoria menetelmiä, jotka käsittelevät yhtälöryhmää sellaisenaan muodossa (NE).

Menetelmä 1 on hyvin yleisesti käytetty ja sillä on useita vahvoja puolia. Ensinnäkin ratkaisun oikeellisuutta on helppo testata, koska $h(x) \geq 0$ kaikilla $x \in \mathbf{R}^n$ ja $h(x^*) = 0$, kun x^* on ratkaisupiste. Toisaalta käytettävissä on kaikki rajoittamattoman epälineaarisen optimoinnin ratkaisurutiinit, joita löytyy runsaasti jokaisesta suuremmasta aliohjelmakirjastosta. Lisäksi voidaan hyödyntää funktion h neliömuoto-ominaisuutta, jota varten on kehitetty tehokkaita erikoismenetelmiä. Yleisimmin käytetyistä kirjastoista löytyvät mm. seuraavat neliösummafunktion minimointirutiinit:

NAG: E04FCF, E04FDF, E04GBF, E04GCF, E04GDF, E04GEF, E04HEF ja E04HFF

HARWELL: VA02A, VA05A, VA07A ja VB03A

IMSL: ZXSSQ

Menetelmää 2 on käsitelty lähteessä Mäkelä (1987), jossa on esitelty tärkeimmät algoritmit, niiden matemaattiset perustelut ja lopuksi testattu saatavilla olevia aliohjelmakirjastorutiineja. Yleisimmin käytettyjä rutiineja ovat:

NAG: C05NBF, C05NCF, C05PBF ja C05PCF

HARWELL: NS01A

IMSL: ZSPOW ja ZSCNT.

3.3 Spesiaaliohjelmistot.

Esittelemme lyhyesti perusperiaatteet melko yleisesti käytetyistä Mathiesenin algoritmista (MPSGE) ja Merrilin algoritmista (GEMODEL). Molemmat käyttävät hyväkseen tasapainomallin erikoisrakennetta, eivätkä siis ole tyyppiä (NE) olevan systeemin yleisiä ratkaisualgoritmeja.

Mathiesenin algoritmi.

Periaate. *Tehtävää käsitellään ns. komplementaarisessa muodossa, joka on tehtävän (NE) erikoistapaus. Lähtien alkuarvauksesta jokaisella iteraatiokierroksella epälineaarinen tehtävä linearisoidaan alkuarvopisteessä käyttäen Taylorin sarjakehitelmää. Tämä linearisoitu tehtävä ratkaistaan käyttäen Lemke'n algoritmia ja ratkaisua käytetään seuraavan iteraatiokierroksen alkuarvona.*

Mathiesenin SLCP (Sequence of Linear Complementarity Problems) -algoritmi perustuu siihen, että yleisen tasapainon mallista saatavaa yhtälöryhmää voidaan käsitellä ns. komplementaarisessa muodossa (CP) (Complementary Problem):

(CP) $\quad$ Etsi $x \in \mathbf{R}^n$ siten, että $F(x) \geq 0, \quad x \geq 0$ ja $x^T F(x) = 0.$

Jos funktio $F : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ olisi lineaarinen transformaatio, so. muotoa:

$$F(x) = q + Mx,$$

missä q on vakio ja M on $n \times n$ matriisi, niin kysymyksessä olisi lineaarinen komplementaarisuus -probleema (LCP). Näin ei kuitenkaan ole asianlaita yleisen tasapainon mallissa. Tällöin päädytään iteratiiviseen prosessiin, jossa jokaisella kierroksella linearisoidaan tehtävä (CP) annetussa alkupisteessä käyttäen Taylorin sarjakehitelmää. Näin saatu lineaarinen probleema (LCP) ratkaistaan käyttäen Lemke'n algoritmia (almost complementary pivoting algorithm), jota on tarkemmin kuvattu lähteessä Lemke (1965). Lineaarisen tehtävän ratkaisua käytetään sitten seuraavan iteraatiokierroksen lähtöpisteenä, joka toivon mukaan on parempi aproksimaatio todelliselle ratkaisulle. Tätä perusiteraatiota toistetaan kunnes ratkaisupiste poikkeaa korkeintaan ennalta määrätyn toleranssin verran oikeasta ratkaisusta.

Funktion F Taylorin sarjakehitelmä pisteessä x^k on muotoa:

$$F(x) = F(x^k) + J_F(x^k)(x - x^k) + \mathcal{O}(\|x - x^k\|^2),$$

missä

$$\mathcal{O}(\|x - x^k\|^2) \longrightarrow 0, \qquad \text{kun} \qquad \|x - x^k\|^2 \to 0$$

ja $J_F(x)$ on funktion F Jacobin matriisi pisteessä x, toisin sanoen muotoa:

$$J_F(x) = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1(x)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_1(x)}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F_n(x)}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial F_n(x)}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

Funktiolle F saadaan lineaarinen approksimaatio $F^k_{lin}(x) = q^k + M^k x$ pisteessä x^k seuraavasti:

$$F^k_{lin}(x) = F(x^k) + J_F(x^k)(x - x^k).$$

Näin ollen tekemällä sijoitukset:

$$\begin{cases} q^k := F(x^k) - J_F(x^k)x^k & \text{ja} \\ M^k := J_F(x^k) \end{cases}$$

saadaan tehtävää (CP) vastaava linearisoitu komplementarisuus -probleema (LCP).

Menetelmän algoritmi on esitetty liitteessä 1. Mathiesenin algoritmia voidaan pitää erikoistapauksena yleisestä linearisointitekniikasta (kts. Neittaanmäki, Mäkelä ja Parviainen, 1986), jota ei yleisestiottaen pidetä erityisen tehokkaana.

Merrilin algoritmi.

Periaate. *Ratkaisualue voidaan typistää rajoitetuksi $n - 1$ ulotteiseksi simpleksiksi, jolloin tehtävä oleellisesti helpottuu. Ratkaisussa käytetään ns. homotopiamenetelmää, jossa muodostetaan helppo aputehtävä, jonka ratkaisuna on annettu alkuarvaus. Ratkaistavan tehtävän ja aputehtävän välille muodostetaan jatkuva kuvaus, homotopia. Jokaisella iteraatiokierroksella simpleksi jaetaan osiin eli kolmioidaan ja homotopiasta muodostetaan paloittain lineaarinen approksimaatio, jonka ratkaisupolku määrätään. Tätä ratkaisua käytetään seuraavan iteraatiokierroksen alkuarvona.*

Kysyntäfunktioiden nollannen asteen homogeenisuus yhdessä voittofunktioiden oletetun lineaarisen homogeenisuuden (hintojen suhteen) kanssa aiheuttaa sen, että mallissa ainoastaan suhteellisilla hinnoilla on merkitystä. Näin ollen tehtävässä (NE) riittää tarkastella $n - 1$ ulotteista simpleksiä:

$$S^n = \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n \mid \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \quad \text{ja} \quad x_i \geq 0 \quad \forall i = 1, \ldots, n\}.$$

Merrilin kiintopistemenetelmä käyttää mallin tätä erikoisominaisuutta hyväkseen, joka rajaa mahdollisten ratkaisujen aluetta huomattavasti. Menetelmä perustuu oleellisilta osin homotopiamenetelmään, jota käsitellään tarkemmin liitteessä 2.

3.4 NE:n palauttaminen epälineaariseksi optimointitehtäväksi.

Periaate. *Epälineaarisen yhtälöryhmän ratkaisu muunnetaan epälineaariseksi optimointitehtäväksi, joka ratkaistaan käyttäen esim. SQP -menetelmää. Jokaisella iteraatiokierroksella muodostetaan annetussa alkuarvopisteessä Lagrangen funktiosta kvadraattinen approksimaatio ja rajoitteet linearisoidaan. Tämän tehtävän ratkaisua käytetään seuraavan iteraatiokierroksen alkuarvona.*

Ratkaistaessa tehtävää (NE) epälineaarisen optimoinnin asiantuntijajärjestelmällä muunnetaan se rajoittamattomaksi optimointitehtäväksi (NO) (Nonlinear Optimization):

$$\text{(NO)} \qquad \text{minimoi} \quad \sum_{j=1}^{n}(F_j(x))^2, \quad \text{kun} \quad x \in \mathbf{R}^n.$$

Tällöin siis ratkaistaan yhtälöryhmä pienimmän neliösumman mielessä. SQP (Sequential Quadratic Programming) -menetelmällä ratkaistaan yleisempiä yhtälörajoitteisia optimointitehtäviä (NEP) (Nonlinear Equality-constrained Problem):

$$\text{(NEP)} \qquad \begin{aligned} &\min\ f(x) \\ &c_j(x) = 0, \ j = 1, \ldots, t. \end{aligned}$$

Tämän tehtävän Lagrange-funktio on muotoa

$$L(x,u) = f(x) - u^T c(x) = f(x) - \sum_{j=1}^{t} u_j c_j(x),$$

missä $u \in \mathbf{R}^t$ on Lagrangen kertojavektori. Merkitään edelleen $a_i(x) = \nabla c_i(x)$ ja

$$A(x) = \begin{bmatrix} a_1(x)^T \\ \vdots \\ a_t(x)^T \end{bmatrix} \qquad c(x) = \begin{bmatrix} c_1(x) \\ \vdots \\ c_t(x) \end{bmatrix}$$

ja $G_i(x) = c_i(x)$:n Hessin matriisi pisteessä x sekä $W(x,u) = \nabla^2_{xx} L(x,u)$. Olkoon x^* tehtävän (NEP) minimipiste ja u^* vastaava Lagrange-kertojavektori. Oletetaan, että $A(x^*)$ on täysiasteinen, eli sen rivit ovat lineaarisesti riippumattomat. Välttämättömistä optimaalisuusehdoista seuraa, että x^* on tällöin myös Lagrange-funktion $L(x,u^*)$ minimipiste $\mathbf{R}^n$:n aliavaruudessa, joka on ortogonaalinen rajoitteiden $c_j(x) = 0$ tangenttitason kanssa (pisteessä x^*). Toisin sanoen x^* on tehtävän (LC) (Linearly Constrained):

$$\text{(LC)} \qquad \begin{aligned} &\min\ L(x,u^*) \\ &\text{ehdoilla } A(x^*)(x - x^*) = 0 \end{aligned}$$

ratkaisu. Optimipisteen Lagrange-kertojat eivät kuitenkaan ole tiedossa, joten pyritään muodostamaan tehtävää (LC) approksimoiva helpompi apuprobleema. Itse asiassa muodostetaan iteratiivisesti sarja kvadraattisia apuprobleemoja, ja tavoitteena on, että näiden ratkaisujen jono x^k lähenee x^*:ä samalla kun niiden Lagrange-kertojat lähenevät u^*:ä.

Olkoon x^k k:nnen kierroksen estimaatti x^*:lle ja olkoon $p = x^* - x^k$ eli $x^* = x^k + p$. Linearisoidaan rajoitteet (Taylorin 1. asteen polynomi):

$$c(x^k + p) \approx c(x^k) + A(x^k)p \ .$$

Koska rajoitteet toteutuvat optimipisteessä, on $c(x^k + p) = 0$, eli approksimoiva lineaarinen rajoite on

$$(*) \qquad A(x^k)p = -c(x^k)\ .$$

Muodostetaan $L(x^k + p, u^*)$:lle approksimaatio, jota pyritään minimoimaan p:n suhteen ehdoilla $(*)$. Taylorin 2. asteen kaavan mukaan

$$L(x^k + p, u^*) \approx L(x^k, u^*) + p^T \nabla L(x^k, u^*) + \frac{1}{2} p^T W(x^k, u^*) p\ .$$

Valitaan nyt

$$\Phi^k(p) = p^T \nabla f(x^k) + \frac{1}{2} p^T B(x^k, u^k) p\ ,$$

missä $B(x^k, u^k)$ on määrätty approksimaatio Lagrange-funktion Hessin matriisille. Määritellään kvadraattinen osatehtävä:

$$(\mathrm{QP}^k) \qquad \boxed{\begin{array}{l} \min\limits_{p}\ \Phi^k(p) \\ \text{ehdolla } A(x^k)p = -c(x^k)\ . \end{array}}$$

Funktiolla Φ^k on se hyvä ominaisuus, että (eräin ehdoin) tehtävien (QP^k) ratkaisut lähenevät x^*:ä ja samalla Lagrange-kertojat lähenevät u^*:ä (juuri tämän vuoksi ei käytetä aivan Taylor-approksimaation mukaista kaavaa).

SQP -menetelmän etuna on lähinnä se, että malli voi sisältää myös lisärajoitteita. Menetelmä on tällä hetkellä tunnetuista epälineaarisen optimoinnin algoritmeista yksi tehokkaimmista. Luonnollisestikin kohdefunktion erikoisrakennetta (neliösumma) hyödyntämällä metodia voidaan edelleen tehostaa. SQP -menetelmän algoritmi on esitetty liitteessä 3.

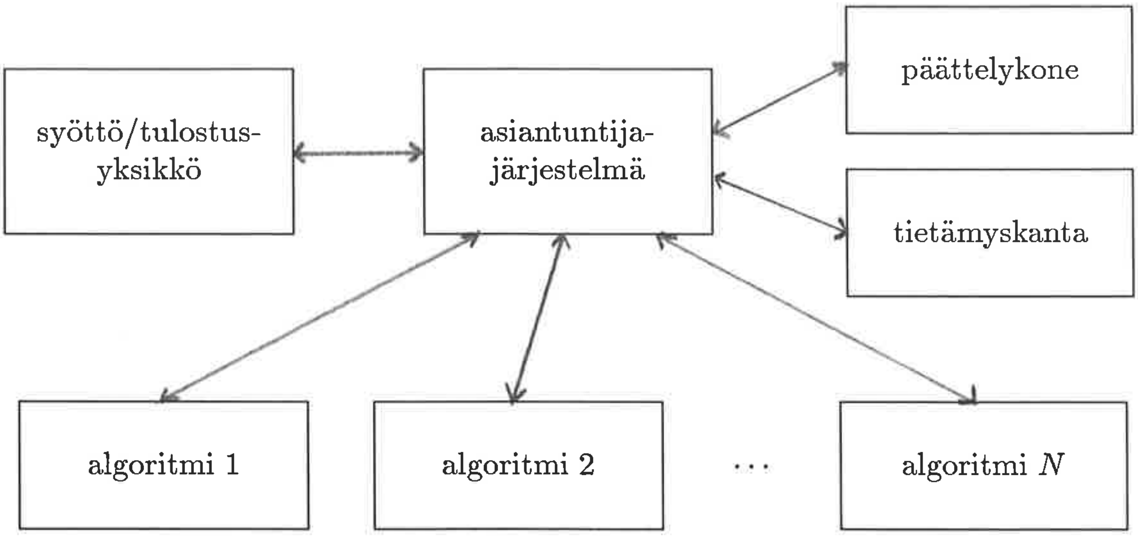
4. Optimoinnin asiantuntijajärjestelmät

4.1 Yleistä asiantuntijajärjestelmistä.

Asiantuntijajärjestelmät (expert systems) liittyvät läheisesti *tekoälyn* (artificial intelligence) tutkimukseen. Tekoälyllä tarkoitetaan karkeasti ottaen "älykkyyttä" edellyttävien toimintojen suorittamista tietokoneella ja tällaisten ohjelmien suunnittelua. Asiantuntijajärjestelmät ovat "älykkäitä" ohjelmia tai ohjelmistokokonaisuuksia, jotka pystyvät suorittamaan asiantuntijan tehtäviä kuten tuotteen kokoonpanon suunnittelua, sairauksien diagnoosia, vianetsintää jne. Järjestelmä käyttää hyväkseen tietokantaa, joka sisältää kyseisen rajatun alueen asiantuntijan tietämyksen (*tietämyskanta*, knowledge base), sekä päätöksentekoyksikköä (*päättelykone*, inference engine), joka hakee ratkaisun ongelmaan soveltamalla tietämyskannan sääntöjä annettuihin syöttötietoihin.

Asiantuntijajärjestelmät ratkaisevat siis tarkkaan rajatun alueen ongelmia. Mitä yleisemmälle tasolle ratkaisu halutaan ulottaa, sitä suurempi tietämys systeemiin on talletettava, jolloin tietokoneen muisti- ja tietoliikennekapasiteetti asettavat rajoituksia.

Epälineaarinen optimointi on eräs riittävän suppea alue, jolla voidaan antaa sääntöjä, joiden mukaan formuloidaan tehtävä, valitaan menetelmä, kirjoitetaan vakiomuotoinen FORTRAN-ohjelma, käännetään, linkitetään ja ajetaan ohjelmat sekä tulostetaan ratkaisu. Kuvassa 3 on esitetty kaavio asiantuntijajärjestelmän organisoimiseksi.



Kuva 3. Asiantuntijajärjestelmän organisaatio.

Epälineaarisen optimoinnin numeerisia menetelmiä on kehitetty laajasti varsinkin kahden viimeisen vuosikymmenen aikana. Yleisesti ottaen menetelmän valinnassa tulisi mahdollisimman tarkkaan ottaa huomioon tehtävän luonne ja pyrittävä käyttämään jotakin erikoistunutta rutiinia, koska tällöin laskenta-aika saattaa vähentyä jopa kymmenesosaan. Tehtävään parhaiten sopivan menetelmän valinta on tärkeää etenkin vaikeissa teollisuusprosessien optimointitehtävissä, joissa on paljon muuttujia ja funktion laskeminen on kallista.

Menetelmiä kehitettäessä ei useinkaan ajatella niiden käyttäjäystävällisyyttä. Kun optimointimenetelmien teoreettisen tutkimuksen ansiosta on edetty yksinkertaisista mutta tehottomista menetelmistä yhä erikoistuneempiin ja tehokkaampiin menetelmiin, on näiden rutiinien soveltaminen tullut monimutkaiseksi. Tämä johtuu siitä, että hienostuneemmat menetelmät edellyttävät välttämättä, että käyttäjä antaa useitakin rutiinin toimintaan oleellisesti vaikuttavia parametreja:

toleranssirajoja, askelpituuksia, skaalauskertoimia jne. Tämä on vaikeaa jopa tottuneellekin optimointimenetelmien käyttäjälle. Mikäli parametreja ei valita huolellisesti, rutiini voi päättyä virhetilanteeseen ja oikeaan ratkaisuun päästään yleensä vain yrityksen ja erehdyksen menetelmällä, joka on sekä epävarmaa että aikaavievää.

Epälineaarisen optimoinnin asiantuntijajärjestelmät ovat edellämainituista syistä herättäneet yhä enemmän kiinnostusta sekä teollisuudessa että korkeakouluissa ja muissa tutkimuslaitoksissa. Asiantuntijajärjestelmällä tarkoitetaan siis tässä ohjelmistosysteemiä, joka on riittävän monipuolinen päätöksentekoon (mm. optimointirutiinin valintaan) kykenevä sekä interaktiivinen järjestelmä.

Asiantuntijajärjestelmälle voidaan asettaa seuraavia perusvaatimuksia:

1. Järjestelmän tulee voida soveltaa tehokkaasti tiettyjä päätössääntöjä, jotka kytkevät annetun ongelman käytettävissä olevaan asiantuntijatietoon.
2. Kaikki tieto on voitava esittää symbolisessa muodossa päätöksentekoprosessia varten.
3. Järjestelmällä tulee olla sovellusalueen perusteiden tuntemusta, jonka avulla se pystyy esim. selittämään, miksi sääntöjen soveltaminen tietyissä tilanteissa epäonnistuu.
4. Järjestelmän tulee voida formuloida ongelma normaalikielisestä (käyttäjän ymmärtämästä) muodosta symboliseen (koneen ymmärtämään), määrätyllä tavalla formatoituun muotoon.
5. Järjestelmä on suunniteltu ratkaisemaan rajatun sovellusalueen mitä tahansa käytännön ongelmia.

4.2 Optimoinnin asiantuntijajärjestelmä EMP.

Suomessa ei liene vielä käytössä laajempia epälineaarisen optimoinnin asiantuntijajärjestelmiä eräitä mikrotietokoneille sovitettuja erikoisohjelmistoja (esim. EUREKA, NPLSOL) lukuunottamatta. Prof. Klaus Schittkowskin työryhmän vuosina 1985–1987 kehittämä järjestelmä EMP on tässä suhteessa ainutlaatuinen. Schittkowski (Bayreuth'n yliopisto) on epälineaarisen optimoinnin algoritmien ja tehokkaan tietokoneimplementoinnin johtava tutkija maailmassa.

EMP on optimointiongelmien mallintamista, ratkaisua ja tietojenkäsittelyä tukeva järjestelmä, jolla voidaan ratkaista tehtävä:

$$(1) \qquad \text{minimoi} \quad f(x) \qquad x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n$$

rajoittein:

$$(2) \qquad g_j(x) = 0 \quad , \; j = 1, \ldots, m_e$$

$$(3) \qquad g_j(x) \geq 0 \quad , \; j = m_{e+1}, \ldots, m$$

(4) $$x_i^l \leq x_i \leq x_i^u \quad , \; i = 1, \ldots, n.$$

Erikoistapauksena tehtävä (1)-(4) sisältää taloustieteissä yleisen LP-mallin, datan sovitemallin sekä epälineaarisen yhtälösysteemin ratkaisemisen. Objektifunktio f voi olla tyypiltään

-lineaarinen
-kvadraattinen
-datan sovitefunktio
-osafunktioiden summa
-osafunktioiden maksimi
-yleinen epälineaarinen funktio.

Rajoitefunktiot g_j voivat olla joko lineaarisia tai epälineaarisia tai kyseessä voi olla rajoittamaton optimointitehtävä, jolloin teknisistä syistä lisätään muuttujakohtaiset rajat (4). Mikäli käyttäjä ei pysty (tai halua) antaa objektifunktion ja rajoitefunktioiden gradientteja, EMP laskee näille vastineet differenssiaproksimaatiota käyttäen.

EMP:n käyttäjän ei tarvitse lukea hankalia käsikirjoja tai määritellä pitkiä parametrilistoja, vaan hän voi keskittyä pääasiaan: ratkaistavaan ongelmaan. Käyttäjältä kysytään vain tehtävään oleellisesti liittyvää informaatiota, muuten EMP itse huolehtii prosessin edistymisestä. Se generoi tehtävästä FORTRAN-kielisen optimointiohjelman, johon käyttäjän on mahdollista liittää omia aliohjelmia ja tiedostoja. Tämän jälkeen EMP suorittaa ohjelman kääntämisen sekä ajamisen.

EMP on sisäisesti dokumentoitu ohjelmisto. Käyttäjälle esitetyt kysymykset ovat menu-tyylisiä monivalintakysymyksiä. Käyttäjä voi valita usean eri ratkaisumenetelmän välillä, joille systeemi antaa ns. varmuusluvun (0–100) riippuen tehtävän erikoisominaisuuksista ja mahdollisista aikaisemmista ratkaisukerroista. Tässä tulee hyvin esille järjestelmän asiantuntemus.

EMP on itseoppiva systeemi. Jokaiseen ratkaistavaan tehtävään voidaan määritellä ns. EXPERIENCE FIELD-kenttä, johon tallennetaan tietoa tehtävän luonteesta ja erikoisominaisuuksista. Tämän avulla EMP voi käyttää vanhoja ratkaisuja hyväkseen ratkoessaan useita samantyylisiä tehtäviä. Varsinaista tietojen syöttöä on helpotettu monella tavalla. Rajoitteita sekä objektifunktiota ei tarvitse muokata eri ratkaisualgoritmien vaativiin esitysmuotoihin, vaan kaiken tyyppiset tehtävät voi syöttää standardimuodossa. Myös rajoitematriisien ja vektorien harvuus on huomioitu siten, että riittää syöttää vain nollasta eroavat komponentit. Usein joudutaan ratkomaan yhden perustehtävän sijasta useita eri modifikaatioita. Tähän EMP soveltuu hyvin tehtävien välisen tiedonsiirto-ominaisuutensa ansiosta.

Tulosten analysointi jälkikäteen on helppoa. EMP tulostaa kaiken tarvittavan informaation ratkaisun kulusta ja lopputuloksesta erilliseen tietokantaan, josta annetun avainsanan perusteella saadaan haluttua tietoa helposti luettavassa muodossa myös jälkikäteen.

EMP:ssä on myös virheanalysointimahdollisuus epäonnistuneen ratkaisun mahdollisista aiheuttajista, mikä helpottaa etenkin kokemattoman käyttäjän työskentelyä.

Aloittelijalle EMP on mainio tapa päästä sisään optimoinnin ja korkean tason ohjelmoinnin maailmaan. Käyttäjäkynnys ei ole kovin korkea: aivan perustiedot FORTRANista ja optimoinnista riittävät alkuun pääsemiseksi. Rutinoituneelle optimoijalle EMP on puolestaan mitä parhain työkalu juuri käyttäjäystävällisyytensä ansiosta. EMP selviytyy vaativistakin tehtävistä ja sen kaikkien ominaisuuksien ja käyttömahdollisuuksien tunteminen monipuolistaa perinteistä kuvaa optimointiohjelmistoista. EMP soveltuu mainiosti myös opetuskäyttöön lähinnä hyvän tulosten käsittelyn ja vertailtavuuden ansiosta. Varsinainen asia ei huku ohjelmointiteknisiin ongelmiin.

Asiantuntijajärjestelmien tulo optimointiin on vasta alullaan. Kuitenkin selvät merkit on havaittavissa siitä, että tämä yksi tärkeimmistä sovelletun matematiikan aloista on saamassa lisää käyttäjäystävällisiä ja tehokkaita ohjelmistoja lähitulevaisuudessa.

5. Eräs tasapainomalli ja sen numeerinen ratkaiseminen

Shoven ja Whalley (1984) ovat esittäneet yksinkertaisen kahden toimialan, kahden tuotantopanoksen ja kahden kuluttajan yleisen tasapainon mallin, jonka avulla he esittelevät näiden mallien perusrakennetta ja mallien soveltamista verosimulointiin. Tätä mallia käytetään tässä esimerkkinä. Malli ratkaistaan ensin GEMODEL- ja MPSGE-ohjelmistoilla ja sen jälkeen tutkitaan sen ratkaisumahdollisuuksia optimoinnin asiantuntijajärjestelmää käyttäen. Edelliset kaksi ohjelmaa eivät vaadi mallin yhtälöiden aukikirjoittamista, vaan mallin rakenne annetaan GEMODEL:issa aineistoa sisään kirjoitettaessa valikkopohjaisesti ja MPSGE:ssä ajojonon määrityksinä. EMP vaatii sensijaan lähtökohdakseen mallin määritelmä- ja identiteettiyhtälömuodon.

GEMODEL-ohjelmisto on tarkoitettu pienten tasapainomallien rakentamiseen ja ratkaisemiseen. Ohjelma rakentuu kolmesta aliohjelmasta, joiden avulla käyttäjä voi tallettaa perusvuoden tuotanto- ja verotiedot ja tarkistaa täyttävätkö ne yleisen tasapainon identiteetit, ratkaista tuntemattomat tasapainohinnat ja verrata alkuperäistä ja veromuutoksen jälkeistä talouden tasapainoa. Jälkimmäinen aliohjelma laskee myös veromuutoksen hyvinvointimuutosten tunnusluvut kuluttajittain. GEMODEL:issa on kiinteäksi ohjelmoitu rakenne, jota käyttäjä ei voi muuttaa. Taloudessa sallitaan ainoastaan kaksi tai kolme toimialaa ja tuotannontekijät rajataan pääomaan, työhön ja maa-alaan, kuluttajia mallissa sallitaan yhdeksäntoista. Ohjelmisto käsittelee julkista valtaa vain verojen kerääjänä ja tulonsiirtojen antajana, julkinen valta ei siten osallistu tuotantoon tai kulutukseen taloudessa. GEMODEL käsittelee taloutta pienenä avotaloutena, joka voi viennin ja tuonnin kautta sopeuttaa kotimaisen tuotannon ja kulutuksen mahdollisen epäsuhdan.

GEMODEL:in suurimpina heikkouksina voidaan pitää sen dimensiorajoitteita ja sitä yksinkertaista tapaa, jolla ulkomaankauppa sulkee mallin. Käyttäjä on sidottu ohjelman kiinteään rakenteeseen ja mallitettavan talouden erityispiirteiden huomioiminen on usein mahdotonta. Ulkomaankaupan osalta käyttäjä ei voi ennakolta määrätä mitkä toimialat ovat suljettuja ja mitkä ovat avoimia ulkomaiselle kilpailulle. GEMODEL:in hyvinä puolina voidaan pitää aliohjelmien kiinteätä kokonaisuutta, jossa työskentely muodostuu systemaattiseksi ja kaikki analyysivaiheet seuraavat luontevasti toisiaan. GEMODEL soveltuneekin suhteellisen hyvin yleisen tasapainon mallien sovellutusten opiskeluun ja yksinkertaisiin tutkimustehtäviin. Ohjelmiston omaksumista vaikeuttaa oleellisesti huonosti dokumentoitu käsikirja. Vorhies (1986, 507) antaa ohjelman tehokkuudesta hyvän arvosanan, mutta välttävän ohjelmiston käyttäjäystävällisyydestä ja dokumentoinnista.

MPSGE-ohjelmisto on kehitetty poistamaan erillisen ohjelmoinnin tarve. Ohjelmalle määriteltävässä ajojonossa ilmoitetaan talouden toimialat, hyödykkeet ja kuluttajat sekä talouden tuotanto- ja hyötyfunktiot jousto- ja veroparametreineen. Näistä lähtötiedoista ohjelma sitten itse johtaa yleisen tasapainon identiteetit. Julkinen valta ja ulkomaat esiintyvät mallissa kuluttajina ja julkisen vallan tuotanto- ja kulutustoiminta voidaan määritellä. Samoin kuin GEMODEL:issa voidaan MPSGE-ohjelmistossakin huomioida panos-, kulutus- ja tuloverot. Ulkomaankauppaa voidaan käsitellä usealla tavalla, esim. vienti ja tuonti voidaan mallittaa hintojensa suhteen joustavina.

MPSGE-mallissa voi esiintyä yhteensä kolmesataa tuntematonta muuttujaa, joka mahdollistaa suurienkin mallien rakentamisen. Ohjelmiston erityispiirre on se, että siinä voidaan ns. keinomuuttujien avulla huomioida määrättyjen markkinoiden epätasapaino. Niinpä käyttäjä voi määritellä malliin esim. pääomamarkkinoiden lainojen ylikysynnän tai työmarkkinoiden ylitarjonnan (työttömyys). Samaa tekniikkaa käyttäen voitaisiin ulkomaankaupassa huomioida Neuvostoliiton kaupan mahdollinen ylijäämä.

MPSGE:n etuna GEMODEL:iin nähden voidaan pitää sen joustavuutta, käyttäjälle tarjotaan laaja yleisrakenne, jonka osia kombinoimalla hän voi rakentaa sangen monipuolisia yleisen tasapainon malleja. Eräs MPSGE:n etu on se, että siinä käytetään Mathiesenin SLCP-ratkaisualgoritmia, joka on useissa yhteyksissä todettu luotettavaksi ja tehokkaaksi. Lisäksi MPSGE:n dokumentointia voidaan pitää huomattavasti GEMODEL:ia parempana. MPSGE on GEMODEL:in tapaan rajoittunut funktio-oletustensa puolesta. Molemmat ohjelmistot on perustettu CES-tuotanto- ja -hyötyfunktioille, jotka MPSGE:ssä voivat olla myös useampitasoisia. CES (Constant Elasticity of Substitution) on rajoittunut funktiomuoto siinä mielessä, että esim. tuotantofunktiossa panosten väliset substituutiojoustot oletetaan vakioiksi ja kunkin panosparin suhteen yhtä suuriksi. CES-funktio on empiirissä sovellutuksissa kuitenkin osoittautunut tarpeeksi yksinkertaiseksi, jotta yleisen tasapainon ratkaisu voidaan löytää.

Esimerkkimalli.

Oletetaan, että talous tuottaa kahta hyödykettä (teollinen ja muu hyödyke) käyttäen kahden kuluttajan (köyhät ja rikkaat) omistamia kahta tuotantopanosta (pääoma ja työ). Kuluttajat omistavat tuotantopanokset, mutta heidän hallussaan ei ole alunperin tuotteiden varantoja. Rikkaat kuluttajat omistavat kaiken pääoman ja köyhät kaiken työvoiman. Kummankin hyödykkeen tuotanto tapahtuu vakioskaalatuottojen vallitessa ja seuraavan CES-tuotantofunktion mukaan:

$$Q_i = \phi_i \left[\delta_i L_i^{\frac{(\sigma_i - 1)}{\sigma_i}} + (1 - \delta_i) K_i^{\frac{(\sigma_i - 1)}{\sigma_i}} \right]^{\frac{\sigma_i}{(\sigma_i - 1)}}, \tag{5.1}$$

jossa Q viittaa tuotokseen, L työ- ja K pääomapanokseen. ϕ on tehokkuusparametri, δ panostulojen jakaumaparametri ja σ on työn ja pääoman välinen substituutiojousto. Panosten kysyntäyhtälöt johdetaan kustannusten minimointiongelmasta ja ne tulevat muotoon:

$$L_i = \phi_i^{-1} Q_i \left[\delta_i + (1 - \delta_i) \left[\frac{\delta_i P_K}{(1 - \delta_i) P_L} \right]^{(1 - \sigma_i)} \right]^{\frac{\sigma_i}{(1 - \sigma_i)}} \tag{5.2}$$

$$K_i = \phi_i^{-1} Q_i \left[\delta_i \left[\frac{(1 - \delta_i) P_L}{\delta_i P_K} \right]^{(1 - \sigma_i)} + (1 - \delta_i) \right]^{\frac{\sigma_i}{(1 - \sigma_i)}}, \tag{5.3}$$

jossa P_L viittaa työn ja P_K pääoman hintaan.

Kuluttajien hyödykkeiden kysyntä johdetaan CES-hyötyfunktion, joka kuvaa kulutettujen hyödykemäärien X ja kuluttajien niistä kokeman hyödyn U riippuvuuden, maksimoinnista budjettirajoitteella. Hyötyfunktio on muotoa:

$$U = \left[\sum_{i=1}^{2} \alpha_i^{\frac{1}{\beta}} X_i^{\frac{(\beta - 1)}{\beta}} \right]^{\frac{\beta}{(\beta - 1)}}, \tag{5.4}$$

jossa α on hyödykkeen meno-osuusparametri ja β on kulutuksen substituutiojousto. Hyödykkeiden kysyntäfunktiot tulevat muotoon:

$$X_i = \frac{\alpha_i Z}{P_i^{\beta} (\alpha_1 P_1^{(1-\beta)} + \alpha_2 P_2^{(1-\beta)})}, \tag{5.5}$$

jossa Z viittaa kuluttajan tuloihin ja P hyödykkeiden hintoihin. Oletusten mukaan köyhillä on vain työtuloja ($P_L W_L$) ja rikkailla vain pääomatuloja ($P_K W_K$), jossa W viittaa kuluttajien alkuperäisiin panosvarantoihin.

Talouteen ei ole mallitettu työ-vapaa-aika-valintaa. Malli voitaisiin kohta esitettävin varanto- ja parametritiedoin ratkaista myös analyyttisesti, mutta tässä malli ratkaistaan numeerisesti, iteroivaa algoritmia käyttämällä. Oletetaan seuraavat panosten alkuvarantojen ja mallin funktioiden parametrien arvot (kts. Shoven ja Whalley, 1984, 1011):

Toimiala	Tuotantoparametrit		
	ϕ_i	δ_i	σ_i
Teollisuus	1.5	0.6	2.0
Muu talous	2.0	0.7	0.5

Kuluttaja	Kysyntäparametrit		
	α_1	α_2	β
Köyhät	0.3	0.7	0.75
Rikkaat	0.5	0.5	1.50

Kuluttaja	Panosten alkuvarannot	
	Työ	Pääoma
Köyhät	60	0
Rikkaat	0	25

Taulukko 5.1 Esimerkkimallin parametrit ja alkuvarannot.

Mallin määritelmäyhtälöt muodostuvat tuotantofunktioista, tuotantopanosten kysyntäfunktioista ja kuluttajien hyödykkeiden kysyntäfunktioista. Määritelmäyhtälöt tulevat seuraavaan muotoon:

Tuotantofunktiot (alaindeksi: 1=teollisuus, 2=muu talous)

(5.6) $$Q_1 = 1.5 \cdot (0.6 \cdot L_1^{0.5} + 0.4 \cdot K_1^{0.5})^{2.0}$$

(5.7) $$Q_2 = 2.0 \cdot (0.7 \cdot L_2^{-1.0} + 0.3 \cdot K_2^{-1.0})^{-1.0}$$

Tuotantopanosten kysyntäfunktiot

(5.8) $$L_1 = 0.667 \cdot Q_1 \cdot (0.6 + 0.4 \cdot (0.6 \cdot P_K/(0.4 \cdot P_L))^{-1.0})^{-2.0}$$

$$L_2 = 0.5 \cdot Q_2 \cdot (0.7 + 0.3 \cdot (0.7 \cdot P_K/(0.3 \cdot P_L))^{0.5})^{1.0} \tag{5.9}$$

$$K_1 = 0.667 \cdot Q_1 \cdot (0.6 \cdot (0.4 \cdot P_L/(0.6 \cdot P_K))^{-1.0} + 0.4)^{-2.0} \tag{5.10}$$

$$K_2 = 0.5 \cdot Q_2 \cdot (0.7 \cdot (0.3 \cdot P_L/(0.7 \cdot P_K))^{0.5} + 0.3)^{1.0} \tag{5.11}$$

Tuotteiden kysyntäfunktiot (yläindeksi: 1=köyhät, 2=rikkaat)

$$X_1^1 = 0.3 \cdot 60 \cdot P_L/(P_1^{0.75} \cdot (0.3 \cdot P_1^{0.25} + 0.7 \cdot P_2^{0.25})) \tag{5.12}$$

$$X_2^1 = 0.7 \cdot 60 \cdot P_L/(P_2^{0.75} \cdot (0.3 \cdot P_1^{0.25} + 0.7 \cdot P_2^{0.25})) \tag{5.13}$$

$$X_1^2 = 0.5 \cdot 25 \cdot P_K/(P_1^{1.5} \cdot (0.5 \cdot P_1^{-0.5} + 0.5 \cdot P_2^{-0.5})) \tag{5.14}$$

$$X_2^2 = 0.5 \cdot 25 \cdot P_K/(P_2^{1.5} \cdot (0.5 \cdot P_1^{-0.5} + 0.5 \cdot P_2^{-0.5})) \tag{5.15}$$

Jotta talous olisi yleisessä tasapainossa täytyy seuraavien kolmen ehdon olla voimassa:

1) Panosten kysyntä on yhtä suuri niiden tarjonnan kanssa

$$K_1 + K_2 = 25$$
$$L_1 + L_2 = 60$$

2) Hyödykkeiden kysyntä on yhtä suuri niiden tarjonnan kanssa

$$X_1^1 + X_1^2 = Q_1$$
$$X_2^1 + X_2^2 = Q_2$$

3) Kumpikaan toimiala ei tuota puhdasta voittoa

$$P_K K_1 + P_L L_1 = P_1 Q_1$$
$$P_K K_2 + P_L L_2 = P_2 Q_2$$

Tarkasteltaessa mallin määritelmä- ja tasapainoyhtälöitä voidaan huomata, että kaikki muut mallin muuttujat voidaan ilmaista neljän tuntemattoman hinnan, P_L, P_K, P_1 ja P_2 funktioina. Työn hintaa käytetään jatkossa numereena, joten jäljelle jää kolme tuntematonta hintaa. Mallin ratkaisuongelma on siten sellaisten hintojen löytäminen, joilla esitetyt kolme tasapainoehtoa täyttyvät.

Shoven ja Whalley (1984) esittävät kuvatun mallin perusratkaisun ja havainnollistavat mallin käyttöä verovaikutusanalyysissä. Verosimuloinnissa lasketaan mallin uusi ratkaisu tilanteessa, jossa rikkaat joutuvat maksamaan teollisuudesta saamistaan pääomatuloista 50 %:n veron. Shoven ja Whalley (1984, 1012) olettavat julkisen vallan jakavan tämän verotulonsa siten, että verokertymän suuruisesta tulonsiirrosta köyhille ohjataan 60 % ja rikkaille 40 %. GEMODEL- ja MPSGE-ohjelmistojen eroista johtuen olemme tässä kuitenkin olettaneet, että koko tulonsiirto kohdistettaisiin köyhille kuluttajille.

Veron asettaminen merkitsee mallissa teollisuuden pääomapanoksen verottamista. Tällöin teollisen pääoman kysyntäfunktiossa (5.10) täytyy pääoman hinta kertoa tekijällä 1.5. Teollisuudessa pääoman ja työn hintasuhde muuttuu, joten myös yhtälössä (5.8) täytyy pääoman hinta esiintyä kerrottuna 1.5:llä. Kerättävä veron määrä on $0.5 \cdot P_K \cdot K_1$, jolla määrällä köyhien tuloja lisätään. Veron asettaminen vaikuttaa teollisuuden voittoehtoihin ja siksi pääoman hinta kerrotaan 1.5:llä tasapainoehdossa 3). Liitteissä 4 ja 5 on esitetty GEMODEL- ja MPSGE-ohjelman vaatimat lähtötiedot sekä mallin perusratkaisun että verosimuloinnin suhteen. Näitä ei kommentoida erikseen, vaan viitataan ohjelmien käsikirjoihin Damus (1985) ja Rutherford (1986). Molemmat ohjelmistot tuottivat saman ratkaisun, taulukossa 5.2 on esitetty keskeiset tulokset.

Tulosten mukaan teollisuuden pääomaveron asettaminen saa aikaan pääoman ja muiden hyödykkeiden hintojen alenemisen ja teollisuushyödykkeiden kilpailukyky talouden muihin hyödykkeisiin nähden alenee niiden hinnan kasvaessa. Tämän seurauksena teollisuustuotteiden kysyntä alenee ja niitä korvataan kulutuksessa talouden muilla hyödykkeillä, joiden tuotanto kasvaa. Rikkaiden kuluttajien tulot ja kulutus alenevat pääoman hinnan alentuessa ja köyhien tulot ja kulutus kasvaa tulonsiirron takia. Talouden bruttokansantuote alenee.

Veron asettamisen hyvinvointivaikutusta on mitattu taulukossa 5.2 Hicksin kompensoivalla variaatiolla. Merkitään sitä CV:llä. Se saadaan kaavasta:

$$CV = \frac{(U^N - U^O)}{U^N} I^N, \tag{5.16}$$

jossa U^N viittaa kuluttajan veronjälkeiseen hyötytasoon, I^N hänen veronjälkeiseen tulotasoonsa ja U^O vanhaan hyötytasoon. Kompensoiva variaatio ilmoittaa, tarkasteltuna veronjälkeisillä hinnoilla ja määrillä, kuinka paljon kuluttajalle olisi annettava rahaa ($CV < 0$) tai häneltä sitä otettava ($CV > 0$) jotta kuluttaja pääsisi veromuutosta edeltävälle hyötytasolleen.

Tulosten mukaan teollisuuden pääomaveron asettaminen aiheuttaa rikkaille hyvinvointitappion, joka ylittää markkamääräisesti köyhien hyvinvointivoiton. Jos kahden kuluttajan kompensaatiomitat lasketaan painottamatta yhteen, niin voidaan todeta, että veron asettaminen aiheuttaa yhteiskunnalle pienen hyvinvointitappion.

Hinnat	Perus	Simulointi	%-ero
Työ	1.000000	1.000000	-
Pääoma	1.373471	1.129636	-17.753
Teollisuus hyöd.	1.399111	1.467053	4.856
Muu hyöd.	1.093076	1.006502	-7.920
Tuotanto/Kysyntä			
Teollisuus	24.942	22.309	-10.557
Muu talous	54.378	57.406	5.568
Tulot/Menot			
Köyhät	60.000	62.267	3.778
Rikkaat	34.337	28.241	-17.753
BKT	94.337	90.508	-4.059
Hyöty			
Köyhät	50.891	55.045	8.162
Rikkaat	27.872	23.447	-15.873

Hicksin kompensoiva variaatio	
Köyhät	4.699
Rikkaat	-5.328
Yhteensä	-0.630

Verokertymä: 2.267

Taulukko 5.2 GEMODEL ja MPSGE -ratkaisujen yhteenveto.

6. Esimerkkimallin käsittely EMP:llä

Edellisessä luvussa kuvattu 16:n yhtälön ja 14:n tuntemattoman yhtälöryhmä ratkaistiin myös epälineaarisen optimoinnin asiantuntijajärjestelmä EMP:llä. Tämän yhtälöryhmän ratkaisussa eniten kiinnostavat hintamuuttujat P_1, P_2, P_L ja

P_K. Näistä P_L voidaan skaalata ykköseksi, jolloin tuntemattomien määrä putoaa 13:een. Hintamuuttujille annettiin ensin alkuarvoiksi ykköset ja tarkkuusvaatimus oli kolme merkitsevää numeroa. Koska tehtävällä ei ole eksaktia ratkaisua, pyritään löytämään tasapainotila, jossa rajoitteita rikotaan mahdollisimman vähän. Tästä syystä EMP:n pysähtymiskriteerit eivät täyty, vaan on käytettävä interaktiivista ratkaisutapaa, jossa iteraatiokierrosten lukumäärää voidaan säätää. Ratkaisussa käytetyt iteraatiokierrosmäärät olivat 50, 100 ja 150. Kun tehtävä oli ratkaistu em. alkuarvoilla, parannettiin alkuarvausta ratkaisun osoittamaan suuntaan ja tehtävä ratkaistiin uudelleen näillä paremmilla alkuarvoilla. Liitteessä 6 on esitetty EMP:n probleematiedoston tulostus ennen tehtävän ratkaisemista. Testiajotulokset on esitetty perusratkaisun osalta taulukossa 6.1 ja verosimulointiratkaisun osalta taulukossa 6.2. Taulukkoon 6.3 on koottu edellisen luvun taulukkoa 5.2 vastaavat tulokset.

Taulukoista 6.1 ja 6.2 voidaan havaita, että alkuarvaus ja iteraatiokierrosten lukumäärä vaikuttaa ratkaisun tarkkuuteen jossain määrin, muutei ratkaisevasti. Ratkaisun suuruusluokka on jo nähtävissä 50 iteraation jälkeen, vaikka käytetään epätarkkaakin alkuarvausta. Verosimulointitehtävä osoittautui hieman vaikeammaksi kuin perustehtävä ja yllättävää verosimuloinnissa oli myös se, että epätarkin ratkaisu saatiin käyttämällä alkuarvoina perustehtävän ratkaisua, joka on jo melko tarkka alkuarvaus.

Taulukoihin 6.1 ja 6.2 on liitetty mukaan myös EMP:n vaatima keskusyksikköaika. Varsinaista ohjelmistojen tehokkuusvertailua ei tässä työssä kuitenkaan suoritettu, johtuen erilaisista käyttöympäristöistä. Ohjelmistoistahan GEMODEL ja MPSGE ovat mikrotietokoneversioita ja EMP on implementoitu VAX/VMS:lle.

Verrattaessa yhteenvetotaulukoita 5.2 ja 6.3 voidaan todeta, että tulokset ovat samansuuntaiset ja samaa suuruusluokkaa riippumatta siitä, ratkaistiinko tehtävät GEMODEL:lla, MPSGE:llä tai EMP:llä. Eroavaisuudet ilmeisesti johtuvat erilaisista ohjelmistojen sisäisistä virhenormeista ja yhtälöiden painotusprioriteeteistä.

Käytössä ovat lyhenteet:

START	–	Lähtöpistehinnat P_1, P_2 ja P_K.
IT	–	Iteraatiokierrosten lukumäärä.
CPU	–	Käytetty keskusyksikköaika sekunteina.
FNORM	–	Ratkaisun tarkkuus mitattuna funktionormilla $\mathrm{F}(1)^2 + \cdots + \mathrm{F}(\mathrm{N})^2$.
STOP	–	Ratkaisupiste.
P	–	Perusratkaisu.

START			IT	CPU	FNORM	STOP		
1.0	1.0	1.0	50	41.6	4.958E-03	1.401784	1.094353	1.376056
1.0	1.0	1.0	100	108.2	1.014E-03	1.399720	1.093471	1.374047
1.0	1.0	1.0	150	182.6	4.205E-04	1.399347	1.093088	1.373224
1.3	1.0	1.3	50	41.9	1.681E-04	1.399404	1.093228	1.373691
1.3	1.0	1.3	100	104.4	8.560E-05	1.399327	1.093085	1.373389
1.3	1.0	1.3	150	176.4	6.962E-05	1.399307	1.093034	1.373290

Taulukko 6.1 EMP:n perusratkaisu.

START			IT	CPU	FNORM	STOP		
1.0	1.0	1.0	50	39.8	1.226E-01	1.481772	1.015804	1.155702
1.0	1.0	1.0	100	99.5	7.138E-02	1.478407	1.013913	1.150391
1.0	1.0	1.0	150	163.4	4.191E-02	1.475707	1.012454	1.146177
1.4	1.0	1.1	50	39.9	1.115E-01	1.482157	1.018190	1.158923
1.4	1.0	1.1	100	99.1	6.118E-02	1.477884	1.015477	1.152997
1.4	1.0	1.1	150	162.2	4.026E-02	1.476717	1.013700	1.148462
P	P	P	50	42.7	1.381E+00	1.529470	1.050437	1.247206
P	P	P	100	109.3	9.185E-01	1.515541	1.043291	1.226690
P	P	P	150	178.2	6.284E-01	1.507734	1.035586	1.209648

Taulukko 6.2 EMP:n verosimulointiratkaisu.

Hinnat	Perus	Simulointi	%-ero
Työ	1.000000	1.000000	-
Pääoma	1.373290	1.148462	-16.372
Teollisuus hyöd.	1.399307	1.476717	5.532
Muu hyöd.	1.093034	1.013700	-7.258
Tuotanto/Kysyntä			
Teollisuus	24.939	22.279	-10.666
Muu talous	54.377	57.291	5.322
Tulot/Menot			
Köyhät	60.000	62.293	3.822
Rikkaat	34.332	28.712	-16.370
BKT	94.332	91.005	-3.527
Hyöty			
Köyhät	50.889	54.671	7.432
Rikkaat	27.921	23.680	-15.189

Hicksin kompensoiva variaatio	
Köyhät	4.309
Rikkaat	-5.142
Yhteensä	-0.833
Verokertymä:	2.293

Taulukko 6.3 EMP:n ratkaisujen yhteenveto.

7. Johtopäätökset

Työpaperin tarkoituksena on ollut tarkastella yleisen tasapainon mallien numeerisia ratkaisumahdollisuuksia ja erityisesti pohtia erään optimoinnin asiantuntijajärjestelmän soveltuvuutta ratkaisuympäristönä. Työpaperissa tätä EMP-järjestelmää on verrattu kahteen spesiaaliohjelmistoon, GEMODEL ja MPSGE. Näiden ohjelmistojen käyttämistä numeerisista algoritmeista tarkasteltiin Mathiensenin SLCP-algoritmia, Merrilin kiintopistealgoritmia sekä SQP-menetelmää. Ohjelmistoja testattiin ratkaisemalla niillä kaksiulotteinen talouden yleisen tasapainon esimerkkimalli, joka edustaa tälläisten mallien yksinkertaista perustyyppiä.

Suoritetuissa simuloinneissa kävi ilmi, että GEMODEL- ja MPSGE-ohjelmistot tuottivat täysin saman tuloksen sekä ongelman perusratkaisun että tarkastellun veroreformin suhteen. EMP-järjestelmä kykeni tuottamaan suhteellisen tarkasti samat ratkaisut sekä talouden hintojen muutosten että lasketun hyvinvointimuutoskriteerin suhteen. Pienet erot ratkaisuissa johtunevat siitä, että sekä GEMODEL- että MPSGE -ratkaisut painottavat lineaarisia tasapainoyhtälöitä ja toteuttavat ne tarkasti, kun taas määritelmäyhtälöissä esiintyy pientä virhettä. EMP puolestaan käsittelee kaikkia yhtälöitä samanarvoisina ja jakaa virheen tasaisesti kaikille yhtälöille. Ohjelmistojen välillä ei kuitenkaan liene suuria eroja ratkaisun löytymisen suhteen. Tässä työssä ei ole puututtu tehokkuuskriteeriin, mutta näyttäisi siltä, että EMP-järjestelmä vaatisi laskenta-aikaa jonkin verran kahta muuta ohjelmistoa enemmän. Saatujen kokemusten perusteella voidaan todeta, että tarkasteltu optimoinnin asiantuntijajärjestelmä soveltuu yleisen tasapainon mallien ratkaisuympäristöksi.

Käyttäjän ohjelmistovalinnassa korostuu kunkin ohjelmiston erityispiirteet. GEMODEL voitaneen dimensiorajoitteidensa takia varata lähinnä yleisen tasapainon mallien perusperiaatteiden opettamiseen ja yksinkertaisempiin tutkimustehtäviin. MPSGE tarjoaa laajat mallittamismahdollisuudet ja sen käyttöä voitaneen perustella niin kauan kun oletus tuotannon ja kulutuksen CES-rakenteesta ei muodostu rajoitteeksi. EMP-järjestelmä vaatii käyttäjältään eniten: malli on annettava ohjelmalle sen matemaattisessa yhtälömuodossa. Mallittajan kannalta tästä on se etu, että on mahdollista kokeilla useita funktiomuotoja ja ohjelmisto ei muutenkaan millään tavalla rajoita mallin rakennetta.

Yleisen tasapainon mallin ratkaisuohjelmiston valinta lienee viisasta perustaa käytännön tutkimustarpeisiin. GEMODEL soveltuu hyvin aihepiiriin tutustumiseen, MPSGE voinee toimia laajemman mallin ensimmäisenä ratkaisuympäristönä ja EMP tai joku muu yleisohjelmisto lopullisena työvälineenä.

LÄHDELUETTELO

1. Borges A. M., *Applied General Equilibrium Models: An Assessment of their Usefulness for Policy Analysis*, OECD Economic Studies **7** (Autumn 1986), 7–43.
2. Damus S., "GEMODEL, version 1.7, A General Economic Equilibrium Simulation Model for Micro Computers," Damus Investment and Agency, Inc., 1985.
3. Fullerton D., Y. K. Henderson and J. B. Shoven, *A Comparison of Methodologies in Empirical General Equilibrium Models of Taxation*, in Scarf and Shoven (1984), 367–410.
4. Lemke C. E., *Bimatrix Equilibrium Points and Mathematical Programming*, Management Science **11** (1965), 681–689.
5. Manne A. S. (ed.), *Economic Equilibrium: Model Formulation and Solution*, Mathematical Programming Study **23** (Oct. 1985).
6. Mäkelä M., "Epälineaarisen systeemin ratkaiseminen tietokoneella," laudatur -tutkielma, Jyväskylän Yliopisto, Matematiikan laitos, 1987.
7. Neittaanmäki P., Mäkelä M., Parviainen S., *Asiantuntijajärjestelmät valtaavat alaa myös optimoinnissa*, Korkeakoulujen atk-uutiset **3** (1986), 17–19.
8. Neittaanmäki P., Mäkelä M., Parviainen S., "Epälineaarinen optimointi," (luentomoniste), Jyväskylän Yliopisto, Matematiikan laitos, 1987.
9. Piggott J. and J. Whalley, "New Developments in Applied General Equilibrium Analysis," Cambridge University Press, Oct. 1986.
10. Rutherford T. F., "The User's Guide to MPS/GE, A PC-Based System for Applied General Equilibrium Modeling," 1986.
11. Scarf H. E. and J. B. Shoven (eds.), "Applied General Equilibrium Analysis," Cambridge University Press, 1984.
12. Shoven J. B. and J. Whalley, *Applied General-Equilibrium Models of Taxation and International Trade: An Introduction and Survey*, Journal of Economic Literature (Seb. 1984), 1007–1051.
13. Törmä H., "Essays in the Demand for Energy in Finnish Manufacturing," Jyväskylä Studies in Computer Science, Economics and Statistics 9, 1987.
14. Vorhies F., *Software Reviews: GEMODEL Version 1.7*, Social Science Microcomputer Review (Winter 1986), 509–511.
15. Ylä-Liedenpohja J., "Korkojen verotuskohtelun muutosvaihtoehdot," Työpapereita F-163, Helsingin kauppakorkeakoulu, 1987.

Liite 1. SLCP -algoritmi (Mathiesen).

askel 0: Anna alkupiste x^0 ja lopetustoleranssi $\varepsilon > 0$ sekä aseta iteraatiolaskuri $k := 0$.

askel 1: Iteraatiokierros: Päivitä laskuri $k := k + 1$.

askel 2: Muodosta funktion F linearisaatio F_{lin}^k pisteessä x^{k-1} siten, että $F_{lin}^k(x) = q^k + M^k x$, missä

$$\begin{cases} q^k := F(x^k) - J_F(x^k)x^k & \text{ja} \\ M^k := J_F(x^k) \end{cases}$$

askel 3: Ratkaise näin saatu (LCP) käyttäen Lemke'n algoritmia ja talleta ratkaisu x^k.

askel 4: Lopetustesti: Jos

$$\max_{i=1,\ldots,n} \{|x_i^k \cdot F_i(x^k)|\} < \varepsilon,$$

niin lopeta. Muussa tapauksessa jatka askeleesta 1.

Liite 2. Homotopiamenetelmä ja Merrilin kiintopistealgoritmi.

Tarkastellaan funktioita $F_0, F : S^n \to S^n$, missä funktio F_0 on niin yksinkertainen, että sen nollakohta x^0 tunnetaan. Ongelma palautetaan funktion kiintopisteen etsimiseen määrittelemällä funktiot $G_0, G : S^n \to S^n$ siten, että

$$\begin{cases} G_0(x) := F_0(x) + x & \text{ja} \\ G(x) := F(x) + x, \end{cases}$$

jolloin funktion F_0 nollakohta x^0 on funktion G_0 kiintopiste, sillä

$$G_0(x^0) = F_0(x^0) + x^0 = x^0.$$

Vastaava pätee myös funktioille F ja G. Määritellään funktioiden G_0 ja G välinen homotopia.

Määritelmä. *Olkoon funktiot $G_0, G : S^n \to S^n$ ja piste $x^0 \in S^n$ siten, että $G_0(x^0) = x^0 0$. Funktio $H : S^n \times [0,1] \to S^n$ on funktioiden G_0 ja G välinen homotopia, jos*

(i) $H(x, 0) = G_0(x)$,

(ii) $H(x, 1) = G(x)$,

(iii) H *on jatkuva.*

Yksinkertaisin mahdollinen funktioiden G_0 ja G välinen homotopia on

$$H(x, t) := (1 - t)G_0(x) + tG(x).$$

Homotopiamenetelmän perusidea on seuraava. Jos tunnetaan piste x^0 siten, että se ratkaisee tehtävän:

$$H(x, 0) = G_0(x) = x,$$

(esim. $G_0(x) := x^0$ kaikilla $x \in S^n$) niin silloin riittävän pienellä $t_1 > 0$ löydetään ratkaisu x^1 siten, että $H(x^1, t_1) = x^1$. Seuraavaksi etsitään ratkaisu x^2 arvolla $t_2 > t_1$ ja näin jatkaen löydetään lopulta ratkaisu x^K siten, että

$$G(x^K) = H(x^K, 1) = x^K$$

ja $t_{k+1} - t_k = 1/K$. Käytännössä pisteet $x^1, \ldots, x^K$ ovat kuitenkin vain approksimaatioita todellisille ratkaisuille. Määritellään seuraavaksi ns. ratkaisupolku.

Liite 2. (jatkuu)

Määritelmä. *Olkoon* $H : S^n \times [0,1] \to S^n$ *homotopia. Jatkuva kuvaus* $x : [0,1] \to S^n$ *on* H*:n ratkaisupolku, jos*

$$H(x(t), t) = x(t) \qquad \textit{kaikilla} \quad t \in [0,1].$$

Ongelmana on siis löytää ratkaisupolku x, jolle $x(0) = x^0$ ja piste $x(1)$ on tehtävän $G(x) = x$ ratkaisu. Tämä ongelma voidaan ratkaista monella eri tavalla, esimerkiksi palauttamalla se tavallisen differentiaaliyhtälöryhmän ratkaisemiseksi. Merrilin kiintopistemenetelmässä muodostetaan homotopiasta H paloittain lineaarinen approksimaatio H_{lin} seuraavasti.

Alueesta $S^n \times [0,1]$ muodostetaan kolmiointi T kärkipisteinä v_i, $i = 1, \ldots, m$. Jokaisessa kärkipisteessä lasketaan homotopian H arvot $H(v_i)$, $i = 1, \ldots, m$. Nämä arvot määräävät tason jokaisen kolmion sisällä ja funktio H_{lin} määritellään näiden tasojen muodostamana paloittain lineaarisena kombinaationa. Lähtien alkupisteestä x^0 jokaisella iteraatiokierroksella k muodostetaan approksimaatio H^k_{lin} käyttäen kolmiointia T^k. Tälle paloittain lineaariselle approksimaatiolle etsitään ratkaisupolku ja pistettä x^{k+1}, jolle $H^k_{lin}(x^{k+1}, 1) = x^{k+1}$ käytetään seuraavan iteraatiokierroksen lähtöpisteenä. Näin jatketaan kunnes riittävä tarkkuus on saavutettu. Alueen kolmiointia on tarkasteltu lähemmin lähteessä Scarf ja Shoven (1984).

Kiintopistealgoritmi (Merrill).

askel 0: Anna alkupiste $x^0 \in S^n$ ja lopetustoleranssi $\varepsilon > 0$ sekä aseta iteraatiolaskuri $k := 0$.

askel 1: Iteraatiokierros: Päivitä laskuri $k := k + 1$.

askel 2: Muodosta alueen $S^n \times [0,1]$ kolmiointi T^k, funktiot G ja G_0, niiden välinen homotopia H sekä sen paloittain lineaarinen approksimaatio H^k_{lin} lähtien pisteestä x^{k-1}.

askel 3: Etsi ratkaisupolku x approksimaatiolle H^k_{lin} ja talleta ratkaisu x^k.

askel 4: Lopetustesti: Jos

$$\max_{i=1,\ldots,n} \{|F_i(x^k)|\} < \varepsilon,$$

niin lopeta. Muussa tapauksessa jatka askeleesta 1.

Liite 3. SQP -algoritmi.

askel 0: Valitse alkupiste x^1 ja approksimaatio B^1 Lagrange-funktion Hessin matriisille. Aseta $k = 1$.

askel 1: Ratkaise kvadraattinen tehtävä (QP^k):

$$\boxed{\begin{array}{l} \min\limits_{p} \; p^T g^k + \frac{1}{2} p^T B^k p \\ \text{ehdoilla } A^k p = -c^k \end{array}}$$

missä $g^k = \nabla f(x^k)$, $A^k = A(x^k)$, $c^k = c(x^k)$. Olkoon ratkaisu p^k.

askel 2: Aseta $x^{k+1} = x^k + p^k$. Lopeta, jos x^{k+1} toteuttaa optimaalisuusehdot.

askel 3: Laske estimaatti u^{k+1} Lagrange-kertojille ja muodosta

$$B^{k+1} := B(x^{k+1}, u^{k+1}).$$

askel 4: Aseta $k = k + 1$ ja mene kohtaan 1.

Matriisin B^k laskemisessa käytetään yleensä kvasi-Newton-kaavoja. Seuraavassa esitetään kaksi yleisintä kaavaa B^k:n määrittelemiseksi.
Merkitään $s^k = x^{k+1} - x^k$ ja $y^k = g^{k+1} - g^k$.

$$(DFP) \quad B^{k+1} = B^k + \frac{s^k s^{kT}}{s^{kT} y^k} - \frac{B^k y^k y^{kT} B^k}{y^{kT} B^k y^k}$$

$$(BFGS) \quad B^{k+1} = B^k + \left[1 + \frac{y^{kT} B^k y^k}{s^{kT} y^k}\right] \frac{s^k s^{kT}}{s^{kT} y^k} - \frac{s^k y^{kT} B^k + B^k y^k s^{kT}}{s^{kT} y^k}$$

(DFP = Davidon & Fletcher & Powell
BFGS = Broyden & Fletcher & Goldfarb & Shanno)

Liite 4. Esimerkkimallin GEMODEL-perusaineisto (annetaan ohjelmalle vastauksina valikkokysymyksiin)

ENDOWMENTS

	CAPITAL	LABOR	TRANSFER SHARE
CONSUMER 1	25	0	0
CONSUMER 2	0	60	1
TOTAL	25	60	1

PRODUCTION FUNCTIONS

	PHI	DELTA	SIGMA
INDUSTRY 1	1.5	.6	2
INDUSTRY 2	2	.7	.5

UTILITY FUNCTIONS

	ALPHA 1	ALPHA 2	BETA
CONSUMER 1	0.50000	0.50000	1.50000
CONSUMER 2	0.30000	0.70000	0.75000

FACTOR TAXES AND IMPORT DUTIES

	CAPITAL	LABOR	DUTY
INDUSTRY 1	0	0	0
INDUSTRY 2	0	0	0

SALES TAXES

	FINAL	INTERMEDIATE INDUSTRY 1	INTERMEDIATE INDUSTRY 2
COMMODITY 1	0	0	0
COMMODITY 2	0	0	0

PERSONAL INCOME TAX = 0 + 0 * Y

Verosimuloinnissa asetetaan INDUSTRY1:n CAPITAL-veroasteeksi 0.5.

Liite 5. Esimerkkimalli MPSGE-perusaineisto (annetaan ohjelmalle ajojonona)

```
MODEL           showall
ACTIVITIES
    manuf.                34.897284
    nonman.               59.439484
COMMODITIES
    labor                 1.
    qmanuf.               1.
    qnonman.              1.
    capital               1.
CONSUMERS
    rich
    poor
UTILITY FUNCTIONS
    rich
    ENDOWMENTS
              capital     34.336775
    ELASTICITIES
                          1.5
    DEMANDS
              qmanuf.     16.110273                 1.
              qnonman.    18.226506                 1.
    poor
    ENDOWMENTS
              labor       60.
    ELASTICITIES
                          .75
    DEMANDS
              qmanuf.     18.787011                 1.
              qnonman.    41.212977                 1.
PRODUCTION FUNCTIONS
    manuf.
    TAX AGENT poor
    OUTPUTS
              qmanuf.     1.
    ELASTICITIES
                          2.
    INPUTS
              capital     .2444803                  1.
              labor       .7555197                  1.
    TAX RATES
              capital     .000
    nonman.
    OUTPUTS
              qnonman.    1.
    ELASTICITIES
                          .5
    INPUTS
              capital     .4341403                  1.
              labor       .5658597                  1.
ENDATA
```

Verosimuloinnissa asetetaan manuf:n TAX RATES -osassa capital-veroasteeksi 0.5.

Liite 6. Esimerkkimallin perusratkaisun problem file (määritykset annetaan EMP-ohjelmalle vastauksina valikkokysymyksiin)

```
* Problem parameters for KOE1   :
   System of equality and/or inequality conditions
   General nonlinear constraints
   Derivatives approximated numerically by forward differences
   Names for variables and functions provided
   Number of variables: 13
   Number of constraints (without bounds): 16
   Number of equality constraints: 16

* Information on variables for KOE1  :
  -  Initial value for P1    :   1.000
  -  Lower bound for P1      :   0.000001
  -  Upper bound for P1      :   100

  -  Initial value for P2    :   1.000
  -  Lower bound for P2      :   0.000001
  -  Upper bound for P2      :   100

  -  Initial value for PK    :   1.000
  -  Lower bound for PK      :   0.000001
  -  Upper bound for PK      :   100

* Constraint function evaluation for KOE1  :
     TF1    =Q1-1.5*(0.6*RL1**0.5+0.4*RK1**0.5)**2.0
     TF2    =Q2-2.0*(0.7*RL2**(-1)+0.3*RK2**(-1))**(-1)
     TK1    =RL1-0.667*Q1*(0.6+0.4*(0.6*PK/(0.4))**(-1))**(-2.0)
     TK2    =RL2-0.5*Q2*(0.7+0.3*(0.7*PK/(0.3))**0.5)
     TK3    =RK1-0.667*Q1*(0.6*(0.4/(0.6*PK))**(-1)+0.4)**(-2.0)
     TK4    =RK2-0.5*Q2*(0.7*(0.3/(0.7*PK))**0.5+0.3)
     TUK1   =X11-18/(P1**0.75*(0.3*P1**0.25+0.7*P2**0.25))
     TUK2   =X12-42/(P2**0.75*(0.3*P1**0.25+0.7*P2**0.25))
     TUK3   =X21-12.5*PK/(P1**1.5*(0.5*P1**(-0.5)+0.5*P2**(-0.5)))
     TUK4   =X22-12.5*PK/(P2**1.5*(0.5*P1**(-0.5)+0.5*P2**(-0.5)))
     PKEQ1  =RK1+RK2-25
     PKEQ2  =RL1+RL2-60
     TKEQ1  =X11+X21-Q1
     TKEQ2  =X12+X22-Q2
     TEV1   =PK*RK1+RL1-P1*Q1
     TEV2   =PK*RK2+RL2-P2*Q2
```

Liite 6.(jatkuu) Esimerkkimallin simulointiratkaisun problem file

```
* Problem parameters for VERO1  :
   System of equality and/or inequality conditions
   General nonlinear constraints
   Derivatives approximated numerically by forward differences
   Names for variables and functions provided
   Number of variables: 13
   Number of constraints (without bounds): 16
   Number of equality constraints: 16

* Information on variables for VERO1 :
  -  Initial value for P1     :    1.399309
  -  Lower bound for P1       :    0.000001
  -  Upper bound for P1       :    100

  -  Initial value for P2     :    1.093034
  -  Lower bound for P2       :    0.000001
  -  Upper bound for P2       :    100

  -  Initial value for PK     :    1.373290
  -  Lower bound for PK       :    0.000001
  -  Upper bound for PK       :    100

* Constraint function evaluation for VERO1 :
      TF1    =Q1-1.5*(0.6*RL1**0.5+0.4*RK1**0.5)**2.0
      TF2    =Q2-2.0*(0.7*RL2**(-1)+0.3*RK2**(-1))**(-1)
      TK1    =RL1-0.667*Q1*(0.6+0.4*(0.6*1.5*PK/(0.4))**(-1))**(-2.0)
      TK2    =RL2-0.5*Q2*(0.7+0.3*(0.7*PK/(0.3))**0.5)
      TK3    =RK1-0.667*Q1*(0.6*(0.4/(0.6*1.5*PK))**(-1)+0.4)**(-2.0)
      TK4    =RK2-0.5*Q2*(0.7*(0.3/(0.7*PK))**0.5+0.3)
      TUK1   =X11-0.3*(60+0.5*PK*RK1)/(P1**0.75*(0.3*P1**0.25
     &        +0.7*P2**0.25))
      TUK2   =X12-0.7*(60+0.5*PK*RK1)/(P2**0.75*(0.3*P1**0.25
     &        +0.7*P2**0.25))
      TUK3   =X21-12.5*PK/(P1**1.5*(0.5*P1**(-0.5)+0.5*P2**(-0.5)))
      TUK4   =X22-12.5*PK/(P2**1.5*(0.5*P1**(-0.5)+0.5*P2**(-0.5)))
      PKEQ1  =RK1+RK2-25
      PKEQ2  =RL1+RL2-60
      TKEQ1  =X11+X21-Q1
      TKEQ2  =X12+X22-Q2
      TEV1   =1.5*PK*RK1+RL1-P1*Q1
      TEV2   =PK*RK2+RL2-P2*Q2
```

ELINKEINOELÄMÄN TUTKIMUSLAITOS (ETLA)
The Research Institute of the Finnish Economy
Lönnrotinkatu 4 B, SF-00120 HELSINKI Puh./Tel. (90) 601 322

KESKUSTELUAIHEITA - DISCUSSION PAPERS ISSN 0781-6847

No 217 TIMO AIRAKSINEN, Pääomaverotuksen teoriaa. 12.11.1986. 63 s.

No 218 VESA KANNIAINEN, Tax Allowances and the Optimal Investment Policy by Firms. 04.12.1986. 45 p.

No 219 JUSSI RAUMOLIN, The Role of Education in the Development of the Mining Sector in Finland. 04.12.1986. 83 p.

No 220 MARKKU RAHIALA - TIMO TERÄSVIRTA - VESA KANNIAINEN, Factors Affecting Firms' Employment Plans in Finnish Manufacturing Industries. 15.12.1986. 30 p.

No 221 TIMO TERÄSVIRTA, Incomplete Ellipsoidal Restrictions in Linear Models. 16.12.1986. 9 p.

No 222 OSMO FORSSELL, Panos-tuotos-laskelmat Suomen Neuvostoliiton-viennistä. 22.12.1986. 119 s.

No 223 OLLI-TAPIO MATTILA, Suomen Neuvostoliiton-kaupan kehitys, kuvioliite. 22.12.1986. 94 s.

No 224 PEKKA ILMAKUNNAS, Survey Expectations vs. Rational Expectations in the Estimation of a Dynamic Model: Demand for Labor in Finnish Manufacturing. 30.12.1986. 22 p.

No 225 PEKKA SPOLANDER, Kapitalmarknader och ägarförhållanden i Finlands näringsliv. 31.12.1986. 42 s.

No 226 JUHA KINNUNEN, Comparison of the Arima-Model Forecasts of Some Finnish Macroeconomic Variables with Econometric Macromodel Forecasts. 31.12.1986. 33 p.

No 227 ERKKI KOSKELA, Personal Savings and Capital Income Taxation: A Differential Incidence Analysis. 12.01.1987. 16 p.

No 228 MORTEN JONASSEN - PAAVO SUNI, Real Exchange Rates as Indicators of Purchasing Power Parity. 20.02.1987. 30 p.

No 229 JUHANI RAATIKAINEN, Variability of Exchange Rates under Rational Expectations. 21.02.1987. 25 p.

No 230 TIMO AIRAKSINEN, Talletusten verollistamisen vaikutus pankkien käyttäytymiseen ja kannattavuuteen. 31.03.1987. 21 s.

No 231 JUHA AHTOLA, Error Correction Mechanism: An Economic Interpretation. 01.04.1987. 10 p.

No 232 HANNU TÖRMÄ, Katsaus eräisiin pohjoismaisiin panossubstituutiotutkimuksiin. 01.04.1987. 49 s.

No 233 HANNU TÖRMÄ, Pääoman, työn, energian ja raaka-aineiden substituutio Suomen, Ruotsin ja Norjan tehdasteollisuudessa. 01.04.1987. 35 s.

No 234 DAVID BENDOR, Finnish Price Competitiveness - A Sectoral Review". 04.06.1987. 70 p.

No 235 VESA KANNIAINEN, An Alternative Corporation Tax: Implications for Efficiency of Investment and Valuations of Shares. 03.06.1987. 17 p.

No 236 PEKKA NYKÄNEN, Tehdasteollisuuden ja sen toimialojen kansainvälinen kilpailukyky. 10.06.1987. 75 s.

No 237 JEAN-PIERRE SICARD - VALDEMAR DOS REIS MEIXEDO, "L'Economie Européenne a l'Horizon 1992. 18.06.1987. 74 p.

No 238 PASI AHDE, Measurement of Capacity Utilization in Manufacturing Industry. 18.06.1987. 22 p.

No 239 PEKKA ILMAKUNNAS, On the Profitability of Using Forecasts. 29.07.1987. 9 p.

No 240 ERKKI KOSKELA, Changes in Tax Progression and Labour Supply under Wage Rate Uncertainty. 06.08.1987. 20 p.

No 241 TIMO TERÄSVIRTA, Superiority Comparisons between Mixed Regression Estimators. 14.08.1987. 11 p.

No 242 SYNNÖVE VUORI, Tiedonhankinnan ja -välityksen kehittäminen Elinkeinoelämän Tutkimuslaitoksessa. 17.08.1987. 54 s.

No 243 PEKKA ILMAKUNNAS, Aggregation vs. Disaggregation in Forecasting Construction Activity. 08.09.1987. 20 p.

No 244 PEKKA ILMAKUNNAS, On the Use of Macroeconomic Forecasts in some British Companies. 09.09.1987. 16 p.

No 245 PENTTI VARTIA - SYNNÖVE VUORI, Development and Technological Transformation - The Country Study for Finland. 05.10.1987. 61 p.

No 246 HANNU HERNESNIEMI, Helsingin Arvopaperipörssin osakeindeksit. 15.10.1987. 64 s.

No 247 HANNU TÖRMÄ - MARKO MÄKELÄ - PEKKA NEITTAANMÄKI, Yleisen tasapainon veromallit ja optimoinnin asiantuntijajärjestelmä EMP. 28.10.1987. 33 s.

Elinkeinoelämän Tutkimuslaitoksen julkaisemat "Keskusteluaiheet" ovat raportteja alustavista tutkimustuloksista ja väliraportteja tekeillä olevista tutkimuksista. Tässä sarjassa julkaistuja monisteita on rajoitetusti saatavissa ETLAn kirjastosta tai ao. tutkijalta.

Papers in this series are reports on preliminary research results and on studies in progress; they can be obtained, on request, by the author's permission.

0033A/28.10.1987